

### Zadání příkladů 3. série BRKOSu

- 3.1 Řešte v  $\mathbb{N}$ :  $t^{b^2} = b^{b^2+t}$ .
- 3.2 Dokažte, že a) součet druhých mocnin b) součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel není druhou mocninou přirozeného čísla.
- 3.3 Vypočtěte v závislosti na  $n$ :
- $$\sum_{i=1}^{n^2-1} [\sqrt{i}]$$
- 3.4 V trojúhelníku  $ABC$  zvolme body  $P, Q, R$  tak, že bod  $P$  leží uvnitř strany  $AB$ ,  $R$  uvnitř strany  $BC$  a  $Q$  leží na úsečce  $PR$ .  
Dokažte nerovnost:  $\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}} \geq \sqrt[3]{S_{\triangle APQ}} + \sqrt[3]{S_{\triangle QRC}}$
- 3.5 Jakých hodnot může nabývat funkce  $F(m)$ ,  
kde  $F(m) = |\{x; 10^{m-1} \leq x < 10^m, x \text{ je prvek Fibonacciho posloupnosti}\}|$ ?
- 3.6 Na odvěsnách  $AC$  a  $CB$  pravoúhlého  $\triangle ABC$  jsou zvoleny po řadě body  $D$  a  $E$ . Dokažte, že paty kolmice z vrcholu  $C$  na přímky  $AB, AE, DB, DE$  leží na kružnici.
- 3.7 Necht' se v  $\triangle ABC$  tři přímky  $t_A, o_B, v_C$  (těžnice z  $A$ , osa úhlu při  $B$  a výška spuštěná z bodu  $C$ ) protínají v jednom bodu. Dokažte, že  $O_B V_C \parallel BC$  ( $O_B$  je  $o_B \cap AC$  a  $V_C$  pata výšky  $v_C$ ).

**Pozn. 1:** Přirozená čísla jsou celá kladná čísla.