

Zadání příkladů 2. série BRKOSu

Termín odeslání: 27. 11. 1991

2.1 Pro kladná čísla x, y, z, a, b, c platí:

$$x^2 + xy + y^2 = a^2$$

$$y^2 + yz + z^2 = b^2$$

$$z^2 + zx + x^2 = c^2$$

Vyjádřete $xy + yz + zx$ pomocí a, b, c .

2.2 Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ jsou navzájem kolmé. Středy stran AB a AD jsou po řadě vedeny kolmice na strany CD a BC . Dokažte, že tyto kolmice a úhlopříčka AC mají společný bod.

2.3 Najděte všechna přirozená čísla n taková, že $n = m^2$, kde $m = |\{d \in \mathbb{N}; d|n\}|$ (neboli m je počet přirozených dělitelů čísla n).

2.4* Na přímce p jdou dány dva různé body A, B . Ještě máme zadáno přirozené číslo k . Řekneme, že množina M je stejnohlá, právě tehdy když $A, B \in M$ a pokud $X, Y \in M$, je i $H_{X, -k}(Y) \in M$ (neboli obraz bodu Y ve stejnolehlosti se středem X a koeficientem $-k$ patří do M). Popište všechny prvky množiny M_{MIN} :

(i) M_{MIN} je stejnohlá

(ii) Pokud je M stejnohlá, je M_{MIN} podmnožinou M

pro a) $k = 2$ b) $k = 3$ c) $k = 4$

2.5* Je dán trojúhelník ABC a body A', B', C' na stranách BC, AC, AB se středy S_A, S_B, S_C popořadě. Necht' body A'', B'', C'' jsou obrazy bodů S_A, S_B, S_C ve stejnolehlostech podle středů A', B', C' s koeficientem $k = -2$ a necht' p_A, p_B, p_C jsou kolmice na BC, AC, AB vedené popořadě body A'', B'', C'' . Dokažte, že přímky AA', BB', CC' se protínají v jednom bodě právě tehdy, když se v jednom bodě protínají p_A, p_B, p_C .

2.6 Řešte rovnici $p(p+1) + q(q+1) = r(r+1)$ pro prvočísla p, q, r .

2.7* Necht' $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$. Dokažte, že pak $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta + 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + 2 \sin(\beta) \sin(\gamma) \sin(\delta) < 1$.

Pozn. 1: Přirozená čísla jsou celá kladná čísla.

Pozn. 2: Příklady označené hvězdičkou se opět nesnažte hledat v literatuře.

Pozn. 3: Vaše opravená řešení 1. série společně se vzorovým řešením a výsledkovou listinou vám doručíme společně se zadáním 3. kola.

Tuto sérii připravili: M. Bulant (2.1, 2.2, 2.3), M. Konečný (2.4, 2.5) a Z. Pezlar (2.6, 2.7)

Na vaše řešení se těšíme na už známé adrese:

Brkos

G., tř. kpt. Jaroše 14

658 70 Brno