

Zadání příkladů 1. série BRKOSu

Termín odeslání: 23. října 1991

- 1.1 Máme sýrovou krychli $3 \times 3 \times 3$ rozdělenou na 27 kostiček $1 \times 1 \times 1$. Dostane se k ní myš. Sežere kostičku $1 \times 1 \times 1$, potom sousední kostičku, a tak dále, dokud nesežere všechny sýr. Může skončit u středové kostičky sýra?
- 1.2 Dokažte, že pro každé přirozené n existuje člen Fibonacciho posloupnosti tímto n dělitelný. Fibonacciho posloupnost je definována takto: $a_0 = a_1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
- 1.3 Necht' n je přirozené číslo a p je prvočíslo takové, že $p - 1$ nedělí n . Dokažte, že p dělí součet $1^n + 2^n + \dots + (p - 1)^n$.
- 1.4 V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Kružnice sestrojená nad stranou AB protíná výšku z vrcholu C a její prodloužení v bodech M, N . Kružnice sestrojená nad stranou AC protíná výšku z vrcholu B a její prodloužení v bodech P, Q . Dokažte, že body M, N, P, Q leží na kružnici.
- 1.5* Určete minimální počet úseček jednotkové délky, které lze umístit do jednotkového čtverce tak, že se žádné dvě neprotínají a nelze tam žádnou další takovou úsečku přidat.
- 1.6 Je dáno přirozené n . Určete počet $x \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ takových, že n dělí $x^2 - 1$
- 1.7* Necht' $[x]$ označuje celou část x (tzn. největší celé číslo menší nebo rovno x). Pro která přirozená X, Y platí

$$\left[\sqrt{A(A+X)} + \sqrt{A(A+Y)} + \sqrt{(A+X) + (A+Y)} \right] = 3A + X + Y - 1$$

pro všechna přirozená A .

Pozn. 1: Přirozená čísla jsou celá kladná čísla!

Pozn. 2: Příklady označené hvězdičkou se nesnažte hledat v literatuře (jsou totiž originální!).

Tuto sérii pro vás připravili: J. Kalvoda (1.4), M. Konečný (1.2, 1.5), M. Panák (1.1), Z. Pezlar (1.3, 1.6, 1.7)

Svá řešení pošlete na adresu:

Brkos
G., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno