Vzorové řešení 6. série

Příklad 6.1. Z náměstí Tří troubů v Hloupětíně vycházejí tři přímé ulice: Dutohlavá, Dubohlavá a Mikrovlnčí. Úhel mezi každýma dvěma z nich je tupý. Hloupětíňané rozhodli, že v každé ulici postaví památník jednomu z místních významných matematiků. Již vybudovali památník lordu Oakošovi v Dubohlavé ulici a další památníky chtějí postavit tak, aby ulice byly osami vnitřních úhlů v trojúhelníku tvořeném památníky. Určete konstrukčně umístění dalších dvou památníků.

Řešení. Použijme označení podle obrázku, kde S je náměstí a A je místo, kde leží již vybudovaný památník. Zvládneme-li sestrojit úhel $x/2$, snadno najdeme místa B, C pro zbývající památníky.

Nechť známe správné umístění památníků B, C. Pak

$$|\angle BSC| = 180^\circ - |\angle ABC|/2 - |\angle ACB|/2 = 180^\circ - (180^\circ - x)/2 = 90^\circ + x/2.$$

Z toho $x/2 = |\angle BSC| - 90^\circ$.

Protože $\angle BSC$ je podle zadání tupý, má vyjádření $x/2$ vždy smysl díky tomu, že $|\angle BSC| - 90^\circ > 0^\circ$. Úhel BSC je zadán polohou ulic, takže můžeme snadno sestrojit úhel $x/2$. Potom sestrojíme polopřímky AP a AQ svírající s přímkou AS úhel $x/2$. Místa pro zbývající dva památníky budou průsečíky těchto polopřímek s ulicemi (tedy polopřímkami SU a SV), na kterých neleží již postavený Oakošův památník.

Ještě musíme udělat diskusi - dokážeme, že úloha má vždy právě jedno řešení. Rovněž musíme dokázat, že výše uvedeným postupem skutečně získáme trojúhelník vyhovující zadání.

Platí, že

$$|\angle ASU| = 360^\circ - |\angle USV| - |\angle ASV| =$$
$$= 360^\circ - (90^\circ + x/2) - |\angle ASV| < 360^\circ - 90^\circ - x/2 - 90^\circ = 180^\circ - x/2$$

(využili jsme toho, že $|\angle USV| = |\angle BSC| = 90^\circ + x/2$, a také toho, že úhel ASV je tupý, takže $|\angle ASV| > 90^\circ$). Z toho $|\angle ASU| + x/2 < 180^\circ$, což je ekvivalentní s tím, že se protnou polopřímky AP a SU (poslední nerovnost zaručuje existenci trojúhelníka, jehož dva úhly mají velikost $|\angle ASU|$ a $x/2$). Podobně se dokáže, že se protnou i polopřímky AQ a SV. Protože se polopřímky protnou v jednom bodě, dostaneme právě jedno řešení.

Mějme sestrojený trojúhelník ABC podle výše uvedeného postupu. Pak

$$\begin{aligned}|\angle SCA| &= 180^\circ - |\angle ASC| - x/2 = 180^\circ - |\angle ASC| - |\angle BSC| + 90^\circ = \\ &= 180^\circ - (360^\circ - |\angle ASB|) + 90^\circ = |\angle ASB| - 90^\circ = \\ &= 180^\circ - |\angle SBA| - x/2 - 90^\circ = 90^\circ - |\angle SBA| - x/2,\end{aligned}$$

z toho

$$90^\circ = |\angle SBA| + |\angle SCA| + x/2, \text{ tudíž } 180^\circ = 2 \cdot |\angle SBA| + 2 \cdot |\angle SCA| + x. \tag{6.1}$$

Protože ABC je trojúhelník, platí:

$$180^\circ = |\angle SBA| + |\angle SBC| + |\angle SCA| + |\angle SCB| + x. \tag{6.2}$$

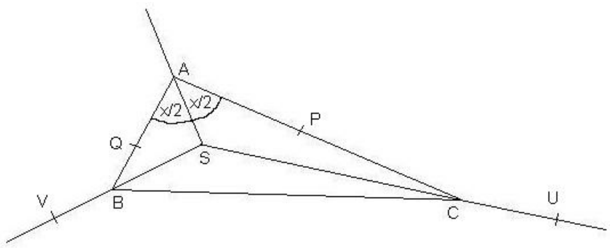
Z 6.1 a 6.2 máme

$$|\angle SBA| + |\angle SCA| = |\angle SBC| + |\angle SCB|. \tag{6.3}$$

Protože AS je osa úhlu BAC v trojúhelníku ABC, nastane právě jedna z následujících možností:

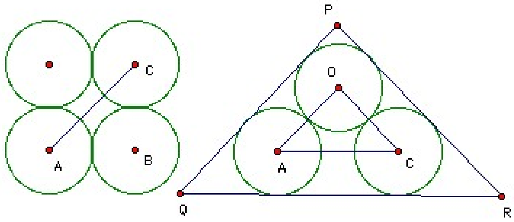
1. $|\angle SBA| < |\angle SBC|$ a $|\angle SCA| < |\angle SCB|$ (pokud S leží mezi A a středem R kružnice vepsané trojúhelníku ABC),
2. $|\angle SBA| = |\angle SBC|$ a $|\angle SCA| = |\angle SCB|$ (pokud $S = R$),
3. $|\angle SBA| > |\angle SBC|$ a $|\angle SCA| > |\angle SCB|$ (pokud S leží na přímce RA, ale neleží na polopřímce RA).

Aby byla splněna rovnost 6.3, musí nastat (2), takže SB a SC jsou skutečně osami úhlů v trojúhelníku ABC.



Příklad 6.2. Památník v Dubohlavé ulici tvoří skleněný kužel, dovnitř nějž je vepsáno pět kulových ploch o poloměru r tak, že se 4 kulové sféry dotýkají podstavy kužele, každá z těchto 4 kulových sfér se dotýká dvou dalších, každá se také dotýká pláště kužele a středy těchto kulových ploch tvoří čtverec. Pátá koule je umístěna tak, že se dotýká pláště každé ze 4 zbylých kulových ploch a také se dotýká pláště kuželu. Dovedli byste určit objem kuželu?

Řešení. Levý obrázek znázorňuje horizontální řez koulemi, které se dotýkají podstavy kužele. Zřejmě $|AC| = 2r \cdot \sqrt{2}$. Pravý obrázek znázorňuje vertikální řez procházející body A, C a středem O horní koule. P je vrchol kužele a QR je průměr jeho podstavy.



Je zřejmé, že trojúhelníky OAC a PQR jsou podobné, jejich strany, které si v podobnosti odpovídají, jsou rovnoběžné a vzdálené o r.

Dále trojúhelníky AOC a ABC jsou shodné (podle věty sss), takže $|\angle AOC| = 90°$. Pak $|\angle QPR| = 90°$ a $|OP| = r \cdot \sqrt{2}$. Velikost výšky vedené z bodu O v trojúhelníku AOC je $|AC|/2 = r \cdot \sqrt{2}$. Proto výška vedená z P v trojúhelníku PQR má délku $|OP| + r \cdot \sqrt{2} + r = (2 \cdot \sqrt{2} + 1) \cdot r$. Tudíž poloměr základny kužele je také $(2 \cdot \sqrt{2} + 1) \cdot r$, takže jeho objem je $\frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} + 1)^3$.

Příklad 6.3. Když si Matěj pročítal dějiny Hloupětína, nalezl zajímavou pověst. Ve sklepení místního hradu je prý schován poklad, který střeží p-hlavý drak Hlavkopapka, kde p je prvočíslo. Hlavkopapka sežere všechny odvážlivce, kteří špatně odpoví na otázku, jaké je největší přirozené číslo n takové, že n-tá mocnina hlav draka dělí faktoriál čtvrté mocniny počtu p. Dokázali byste se dostat přes tuto nemilosrdnou saň?

Řešení. V množině $\{1, 2, 3, ..., p^4\}$ je p^3 násobků p, z nich je p^2 čísel dělitelných p^2, z těchto čísel je p dělitelných číslem p^3 a z nich je dokonce jedno dělitelné p^4! Takže nejvyšší mocnina p, která dělí $p^4!$, je $p^3+p^2+p+1 = (p^4-1)/(p-1)$.

Příklad 6.4. I když hledač pokladu odpoví správně, nemá zdaleka ještě vyhráno. Nalezne sice truhlu s pokladem, ale bez číselného kódu se mu ji nepodaří otevřít. Určete všechny možné kombinace, víte-li, že je hledaný kód deseticiferný ve tvaru $a_0a_1a_2 \dots a_9$, přičemž pro všechna $k = 0, 1, \dots, 9$ udává a_k počet výskytů cifry k v kódu.

Řešení. Ze zadání je jasné, že

$$S := \text{součet všech cifer kódu} = a_0 + a_1 + ... + a_9 = \text{počet cifer v kódu} = 10. \tag{6.4}$$

Dále je buď mezi čísly a_6, a_7, a_8, a_9 právě jedno rovno 1 a ostatní jsou 0, nebo jsou všechna čtyři rovna 0. Pokud by některé z nich bylo ≥ 2 nebo aspoň dvě z nich byla ≥ 1, měli bychom v kódu aspoň dvě čísla > 5, takže $a_0 + \dots + a_9 > 10$, což je spor s 6.4.

Pokud je $a_i = 0$ pro všechna i z $\{6, 7, 8, 9\}$, musí být všechna $a_i \leq 5$. Pak zejména $a_0 \leq 5$, takže máme nejméně 5 nenulových cifer. To znamená, že mezi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 jsou aspoň čtyři ≥ 1. Pak $S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 9a_9 \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, musí tedy podle 6.4 platit rovnost, která nastane, právě když $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ a $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$. Protože $\sum_{i=0}^{9} a_i = 10$, musí být $a_0 = 6$, což je spor s $a_6 = 0$.

Tudíž mezi čísly a_6, a_7, a_8, a_9 je právě jedno rovno 1. Pokud $a_1 = 1$, máme v kódu aspoň dvě jedničky, což odporuje $a_1 = 1$, takže $a_1 \geq 2$.

Pokud $a_7 = 1$, musí být $a_0 = 7$ (číslo 7 nemůže být jinde než na místě a_0, protože pak by v kódu muselo být 7 cifer ≥ 1 a $S \geq 14$). Už jsme odvodili, že $a_1 \geq 2$, takže mezi a_2, a_3, a_4, a_5 musí být aspoň jedno číslo ≥ 1. Pak by $S \geq 1 + 7 + 2 + 1 = 11$, což je spor.

Podobně (dokonce jednodušeji) dostaneme spor pro $a_8 = 1$ i $a_9 = 1$.

Zbývá nám $a_6 = 1$. Ze stejného důvodu jako výše musí být $a_0 = 6$ a už víme, že $a_1 \geq 2$. Pak mezi a_2, a_3, a_4, a_5 musí být aspoň jedno číslo ≥ 1. Potom $S \geq 1 + 6 + 2 + 1 = 10$, takže musí nastat rovnost. Z toho $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Pro kód tedy máme jedinou možnost: 6210001000. Snadno lze ověřit, že tato možnost vyhovuje zadání.

Příklad 6.5. Matěj už už přemýšlel, že by se vydal poklad získat, ale Henry mu jeho plány překazil. Prý musí své bohatství nabýt poctivou prací. A aby se prý nenudil, tak ať mu honem najde všechny možné hodnoty funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definované vztahem $f(n) = f(f(n+11))$ pro $n < 101$ a $f(n) = n - 10$ pro $n > 100$. Dokázali byste to také?

Řešení. Ukážeme, že $f(n) = 91$ pro $n \geq 100$. Pro $n = 100, 99, \ldots, 90$ platí $f(n) = f(f(n+11)) = f(n + 11 - 10) = f(n+1)$. Ale $f(101) = 91$, takže $f(n) = 91$ pro $n = 100, 99, \ldots, 90$. Rovnost $f(n) = 91$ pro $n = 89, 88, \ldots, 1, 0, -1, \ldots$ se snadno dokáže indukcí:

$$\begin{aligned} f(n) = f(f(n+11)) = f(f(f(n+11+11))) = \cdots = f(f(\ldots f(f(x))\ldots)) = \\ = f(f(\ldots f(91)\ldots)) = f(f(\ldots 91 \ldots)) = \cdots = 91, \end{aligned}$$

kde x je z $\{90, 91, \ldots, 100\}$.

Dále z výše uvedeného a z předpisu $f(n) = n - 10$ pro $n > 100$ je zřejmé, že funkce f nabývá právě všech hodnot z množiny $\{91, 92, 93, \ldots\}$.

Příklad 6.6. Když Matěj spočítal Henryho příklad, rozhodl se, že přeci jen na poklad na chvilku zapomene a vrátil se zpět ke čtení dějin Hloupětína. Našel tam, že v Hloupětíně byly objeveny dva významné pergameny. Na obou byly řešené zajímavé příklady. Bohužel se však dochovala jen zadání těchto příkladů. Na prvním svitku se dokazovalo, že existují reálná čísla A, B taková, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n.$$

Poradili byste si s tímto prastarým příkladem?

Řešení. V průběhu řešení několikrát použijeme vzorec

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)},$$

který platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ kromě takových hodnot x, y, kdy některý výraz ve vzorci nemá smysl.
Pro $n = 1$ máme

$$\operatorname{tg}(1) \cdot \operatorname{tg}(0) = A \cdot \operatorname{tg}(1) + B. \quad \text{Z toho} \quad B = -A \cdot \operatorname{tg}(1). \tag{6.5}$$

a pro $n = 2$ dostaneme

$$\operatorname{tg}(1) \cdot \operatorname{tg}(0) + \operatorname{tg}(2) \cdot \operatorname{tg}(1) = A \cdot \operatorname{tg}(2) + 2B$$

tj.

$$\frac{2 \cdot \operatorname{tg}(1)}{1 - \operatorname{tg}^2(1)} \cdot \operatorname{tg}(1) = A \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(1)}{1 - \operatorname{tg}^2(1)} + 2B \tag{6.6}$$

Z 6.5 a 6.6 získáme rovnici pro A, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cdot \operatorname{tg}^2(1)}{1 - \operatorname{tg}^2(1)} &= A \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(1)}{1 - \operatorname{tg}^2(1)} - 2A \cdot \operatorname{tg}(1) \\
2 \cdot \operatorname{tg}^2(1) &= 2A \cdot \operatorname{tg}(1) - 2A \cdot \operatorname{tg}(1) \cdot [1 - \operatorname{tg}^2(1)] \\
\operatorname{tg}(1) &= A - A \cdot [1 - \operatorname{tg}^2(1)] \\
A &= \frac{1}{\operatorname{tg}(1)}
\end{aligned}$$

Pak podle 6.5 je $B = -1$.

Nyní indukcí dokážeme, že rovnost ze zadání platí pro $A = 1/\operatorname{tg}(1)$ a $B = -1$:
Pro $n \in \{1, 2\}$ jsme rovnost ověřili výše. Nechť je daná rovnost splněna pro n a dokážeme, že platí i pro $n + 1$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{tg}(k) \cdot \operatorname{tg}(k-1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(1)} \cdot \operatorname{tg}(n+1) + (-1) \cdot (n+1) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}(k) \cdot \operatorname{tg}(k-1) + \operatorname{tg}(n+1) \cdot \operatorname{tg}(n) = \frac{\operatorname{tg}(n+1)}{\operatorname{tg}(1)} - n - 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow &\frac{\operatorname{tg}(n)}{\operatorname{tg}(1)} - n + \operatorname{tg}(n) \cdot \frac{\operatorname{tg}(n) + \operatorname{tg}(1)}{1 - \operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(1)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(n) + \operatorname{tg}(1)}{1 - \operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1)} - n - 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow &\operatorname{tg}(n) \cdot [1 - \operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1)] + [\operatorname{tg}(n) + \operatorname{tg}(1)] \cdot \operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1) = \\
&= \operatorname{tg}(n) + \operatorname{tg}(1) - \operatorname{tg}(1) \cdot [1 - \operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1)]
\end{aligned}$$

Snadno lze ověřit, že poslední rovnost je splněna. Budeme hotovi, když dokážeme, že postup při dokazování indukčního kroku byl korektní.

Výrazy $\operatorname{tg}(n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou definovány, neboť funkce $\operatorname{tg}(x)$ není definována právě pro $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \pi/2 + k\pi$ a v této množině se nevyskytuje žádné přirozené číslo, protože π je iracionální.

Protože poslední úprava byla násobení obou stran rovnice výrazem $\operatorname{tg}(1)\cdot[1-\operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1)]$ a také se výraz $1-\operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1)$ objevuje ve jmenovateli, musíme dokázat, že $1-\operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1) \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (snadno se např. z grafu ověří, že $\operatorname{tg}(1) \neq 0$). Již jsme dokázali, že výrazy $\operatorname{tg}(n+1)$, $\operatorname{tg}(n)$ a $\operatorname{tg}(1)$ jsou definovány, navíc $\operatorname{tg}(n+1) = (\operatorname{tg}(n)+\operatorname{tg}(1))/(1-\operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1))$, takže $1-\operatorname{tg}(n)\operatorname{tg}(1) \neq 0$.

Postup tedy byl korektní, důkaz je hotov.

Příklad 6.7. Na druhém pergamenu byl tento příklad. Bylo dáno přirozené číslo n a reálné číslo k, $0 \leq k \leq n$. Dále byly uvažovány všechny n-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = k$$

Úkolem bylo najít nejvyšší hodnotu výrazu

$$|\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i|.$$

Dokázali byste vyřešit také úlohu z druhého svitku?

Řešení. Uvažujme Cauchyovu nerovnost pro n-tice $(\sin(x_1), \ldots, \sin(x_n))$, $(\cos(x_1), \ldots, \cos(x_n))$ a předpokládejme, že

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = k, \quad \text{kde} \quad k \in \langle 0, n \rangle.$$

Dostaneme nerovnost

$$[\sin(x_1)\cdot\cos(x_1) + \ldots + \sin(x_n)\cdot\cos(x_n)]^2 \leq$$
$$\leq [\sin^2(x_1) + \ldots + \sin^2(x_n)] \cdot [\cos^2(x_1) + \ldots + \cos^2(x_n)],$$

na kterou budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$\left|\frac{\sin(2x_1)}{2} + \ldots + \frac{\sin(2x_n)}{2}\right| \leq$$
$$\leq \sqrt{[\sin^2(x_1) + \ldots + \sin^2(x_n)] \cdot [1-\sin^2(x_1) + \ldots + 1-\sin^2(x_n)]} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i)\right| \leq 2 \cdot \sqrt{k\cdot(n-k)}. \tag{6.7}$$

V Cauchyově nerovnosti pro dvě n-tice reálných čísel nastane rovnost, právě když jedna n-tice je reálným násobkem druhé. V našem případě tedy nastane rovnost, právě když existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna i z $\{1, ..., n\}$ je $\sin(x_i) = \cos(x_i)$. Zvolíme-li $(x_1, ..., x_n)$ tak, aby $x_1 = \ldots = x_n$ a $\sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i) = k$, pak zřejmě $\sin(x_1) = \ldots = \sin(x_n)$ a $\cos(x_1) = \ldots = \cos(x_n)$, takže jistě existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že $(\sin(x_1), \ldots, \sin(x_n)) = t \cdot (\cos(x_1), \ldots, \cos(x_n))$. V 6.7 tedy může nastat rovnost, tudíž nejvyšší hodnota výrazu $|\sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i)|$ je $2 \cdot \sqrt{k \cdot (n-k)}$.