Vzorové řešení 5. série

Příklad 5.1. Když šli Matěj s Liběnkou spát, vzpomněli si, že jim, když byli ještě malí, povídal jejich tatínek na dobrou noc pohádku. I začali škemrat, že tento večer je úplně ten nejvhodnější k obnovení starých tradic. Inu, odolat prosbám svých dětí, to vskutku Henry nedokázal. A tak, když už byly děti zalezlé v pelíšku, vešel do pokoje a začal vyprávět: „Za devatero horami, devatero řekami, devatero hradbami a za devatero vším, na co si vzpomenete, bylo číselné království. Králem v této zemi bylo přirozené číslo Kárl. Kárl mělo dva syny, též přirozená čísla Mňuka a Fňuka. Jednou Kárl rozhodlo, že musí své syny oženit, a tak se s nimi vydalo hledat jejich nevěsty. Mňuk hledal Mňučku, Fňuk hledal Fňučku. Kárl pravilo, že nevěsty musejí být nesoudělná přirozená čísla a navíc, aby byly hodny královského rodu, musí být součet součinu Fňuka a Fňučky se součinem Mňuka a Mňučky násobek Kárla. A tak chodili světem a hledali a hledali …“ A to už Henry zjistil, že obě děti spinkají. Ráno, když se Liběnka probudila, hnedka se ptala Henryho, jestli vůbec bylo možné, aby si synové našli své nevěsty. Dokažte, že to možné bylo.

Řešení. Použijeme označení: $k =$ Kárl, $m =$ Mňuk, $f =$ Fňuk, $m_0 =$ Mňučka, $f_0 =$ Fňučka. Máme tedy dokázat, že pro libovolná $k, m, f \in \mathbb{N}$ existují nesoudělná $m_0, f_0 \in \mathbb{N}$ taková, že $m \cdot m_0 + f \cdot f_0$ je násobkem k. Nechť $d = (m, f)$ je největší společný dělitel m a f. Položme

$$m_0 = f/d, f_0 = f \cdot h \cdot k - m/d,$$

kde h je libovolné přirozené číslo, pro které je $f_0 > 0$. Pak

$$m \cdot m_0 + f \cdot f_0 = m \cdot f/d + f \cdot f \cdot h \cdot k - m \cdot f/d = f \cdot f \cdot h \cdot k,$$

což je násobek k. Pokud e dělí m_0, dělí také

$$m_0 \cdot d \cdot h \cdot k = f \cdot h \cdot k.$$

Takže pokud e dělí m_0 i f_0, dělí rovněž $f_0 - f \cdot h \cdot k = -m/d$. Ale f/d a m/d jsou nesoudělná, tudíž $e = 1$. Takže m_0 a f_0 jsou nesoudělná, což bylo potřeba dokázat.

Příklad 5.2. Jednoho krásného sluníčkového odpoledne se vydali Matěj s Liběnkou na procházku zasněženou hloupětínskou krajinou. Nejdřív se koulovali, pak dělali andělíčky do sněhu a pak si kreslili různé obrazce. Nejprve

Matěj nakreslil konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Liběnka pak dokreslila body A', B', C' a D' tak, že A je středem úsečky $A'D$, B je středem úsečky $B'A$, C je středem úsečky $C'B$ a D je středem úsečky $D'C$. Potom od Matěje chtěla, aby jí dokázal, že obsah čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ je pětkrát větší než obsah čtyřúhelníka $ABCD$. Dokázali byste to také?

Řešení. Uvažujme trojúhelníky $A'B'A$ a ABD. Za základnu $A'B'A$ můžeme považovat $A'A$, jež má stejnou délku jako AD, což je základna ABD. Dále velikost výšky na $A'A$ je

$$|AB'| \cdot \sin|\angle B'AA'| = 2|AB| \cdot \sin(180^\circ - |\angle B'AA'|) = 2|AB| \cdot \sin|\angle BAD|,$$

což je dvojnásobek velikosti výšky na základnu AB v trojúhelníku ABD. Tudíž obsah trojúhelníku $A'B'A$ je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABD. Podobně

$$S_{B'C'B} = 2S_{BAC}, \quad S_{C'D'C} = 2S_{CBD} \quad \text{a} \quad S_{D'A'D} = 2S_{DCA}.$$

Sečtením dostaneme

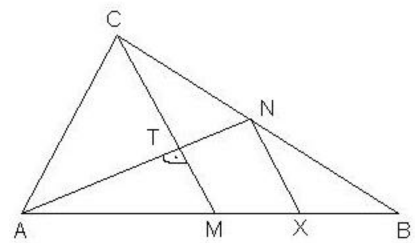
$$S_{A'B'A} + S_{C'D'C} = 2S_{ABCD} \quad \text{a} \quad S_{B'C'B} + S_{D'A'D} = 2S_{ABCD}.$$

Dále zřejmě

$$S_{A'B'C'D'} = S_{A'B'A} + S_{B'C'B} + S_{C'D'C} + S_{D'A'D} + S_{ABCD} = 5 \cdot S_{ABCD}.$$

Příklad 5.3. Aby se Liběnka mezitím nenudila, vymyslel jí Matěj také příklad. Měla zkonstruovat trojúhelník ABC, znala-li velikosti stran AB a BC a věděla-li,že těžnice na tyto dvě strany jsou navzájem kolmé. Zvládli byste i Liběnčinu konstrukční úlohu?

Řešení. Předpokládejme, že máme sestrojený trojúhelník ABC vyhovující zadání. Použijeme označení jako na obrázku, kde M je střed AB, N je střed BC, X je střed MB a T je těžiště trojúhelníku ABC. Z vlastností těžiště víme, že $|AT|/|AN| = 2/3$. Dále z toho, jak byly sestrojeny body M a X,



máme $|AM|/|AX| = 2/3$. Tedy $|AT|/|AN| = |AM|/|AX|$, takže trojúhelníky ATM a ANX jsou podobné. Potom úhel ANX je pravý. Z toho je jasné, že střed strany BC v libovolném trojúhelníku ABC (který vyhovuje zadání) leží na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem AX a také leží na kružnici l se středem v bodě B a poloměrem $|BC|/2$.

Konstrukci provedeme tak, že nejprve sestrojíme úsečku AB, pak její střed M, potom bod X, jež je středem MB. Dále sestrojíme Thaletovu kružnici k nad průměrem AX a také kružnici l se středem v bodě B a poloměrem $|BC|/2$. Průsečík kružnic k a l (pokud existuje) je bod N. Bod C splňující podmínku, že N je středem BC, už snadno sestrojíme.

Úloha nemá řešení, pokud kružnice k a l nebudou mít společný bod (to nastane, právě když $|BC| < |AB|/2$ nebo $|BC| > 2|AB|$),nebo když budou mít společný jediný bod ($|BC| = |AB|/2$ nebo $|BC| = 2|AB|$). V tomto případě by střed strany BC (bod N) ležel na straně AB, což v trojúhelníku ABC není možné. Pro ostatní hodnoty $|AB|$ a $|BC|$ se k a l protnou ve dvou bodech a jako řešení dostaneme dva osově souměrné trojúhelníky (podle osy AB). Ještě musíme ověřit, že tyto trojúhelníky skutečně vyhovují zadání.

Ověření je snadné, neboť je obrácením úvah ze začátku řešení: Strany AB a BC zřejmě mají správnou délku. Zbývá nám ověřit kolmost těžnic AN a CM. Úhel ANX je pravý, neboť bod N leží na Thaletově kružnici s průměrem AX. Dále $|AT|/|AN| = 2/3 = |AM|/|AX|$, takže trojúhelníky ATM a ANX jsou podobné. Pak AN je kolmé na CM.

Příklad 5.4. Když se Matěj s Liběnkou vrátili, udělali si na zahřátí horký čaj a povídali si u krbu. Vtom přišel Henry a už od dveří hulákal: „Děcka pozor, mám pro vás perfektní příklad na takové to domácí počítání: Jsou dána tři různá celá čísla x, y, z. Dokažte, že $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ je dělitelné $5(x-y)(y-z)(z-x)$.“ Liběnka s Matějem se smáli a s radostí se vrhli do počítání. Zvládli byste také spočítat tento Henryho příklad?

Řešení. Položme $x - y = r$, $y - z = s$. Pak $z - x = -(r + s)$, tudíž

$$\begin{aligned}
&(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = r^5 + s^5 - (r+s)^5 = \\
&= -5r^4s - 10r^3s^2 - 10r^2s^3 - 5rs^4 = -5rs(r^3 + 2r^2s + 2rs^2 + s^3) = \\
&= -5rs[r(r^2 + rs + s^2) + s(r^2 + rs + s^2)] = -5rs(r+s)(r^2 + rs + s^2) = \\
&= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).
\end{aligned}$$

Příklad 5.5. Na hranici Lenošína a Hloupětína stojí starý hrad. Jeho půdorys má tvar pravidelného n-úhelníku, ve kterém platí, že rozdíl délek nejdelší a nejkratší jeho úhlopříčky je roven délce strany tohoto mnohoúhelníku. Matěj se rozhodl, že zjistí, kolik stran tento mnohoúhelník má. Vydal se k hradu a začal počítat. Když už jej obíhal počtvrté a pořád se nemohl dopočítat, dospěl k názoru, že tento způsob nebude tím nejvhodnějším k určení počtu stran mnohoúhelníku. Pomozte Matějovi určit, jaký pravidelný mnohoúhelník je půdorysem hradu, pokud je více možností, najděte je všechny.

Řešení. Půdorysem hradu jistě nemohl být trojúhelník, neboť trojúhelník nemá žádnou úhlopříčku. Nemohl jím být čtverec ani pětiúhelník, poněvadž v těchto případech je nejkratší úhlopříčka stejně dlouhá jako nejdelší. Pro $n = 6$ a $n = 7$ platí, že nejdelší úhlopříčka, nejkratší úhlopříčka a strana n-úhelníka tvoří trojúhelník, takže rozdíl délek nejdelší a nejkratší úhlopříčky je menší než délka strany. Pro $n > 7$ má strana délku $2r \cdot \sin(\pi/n)$, nejkratší úhlopříčka má délku $2r \cdot \sin(2\pi/n)$ a nejdelší úhlopříčka má délku $2r$ pro n sudé a

$$2r \cdot \sin\Big(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Big) = 2r \cdot \sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\Big) = 2r \cdot \cos\frac{\pi}{2n}$$

pro n liché (kde r je poloměr krunice opsané n-úhelníku). Takže potřebujeme:

$$\begin{aligned} \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n} &= 1 \quad \text{a } n \text{ je sudé, nebo} \\ \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n} &= \cos\frac{\pi}{2n} \quad \text{a } n \text{ je liché.} \end{aligned}$$

Levé strany výše uvedených rovnic jsou zřejmě ostře klesající funkce proměnné n a pravé strany jsou neklesající, takže může existovat nejvýše jedno řešení pro každou rovnici. Druhá rovnice je splněna pro $n = 9$, neboť

$$\sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9} = 2 \cdot \sin\Big(\frac{2\pi + \pi}{2 \cdot 9}\Big) \cdot \cos\Big(\frac{2\pi - \pi}{2 \cdot 9}\Big) = 2 \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}.$$

To, že pravidelný 9-úhelník vyhovuje zadání, lze vidět i geometricky: Označme si délky nejdelší úhlopříčky, nejkratší úhlopříčky a strany pravidelného 9-úhelníku po řadě d, k a a_9. Uvažujme čtyřúhelník, jehož dvě protější strany mají délky d a k a jehož dvě zbývající strany mají délku a_9. Velikost úhlu mezi stranami délek d a a_9 je $60°$, takže $d = k + 2a_9 \cdot \cos 60°$.

Takže $n = 9$ je jediné řešení pro n liché.

Pro $n = 8$ máme stejný čtyřúhelník jako pro 9-úhelník, avšak velikost úhlu je $67,5°$, proto rozdíl délek úhlopříček je roven $2a_8 \cdot \cos 67,5°$, což je menší než $2a_8 \cdot \cos 60° = a_8$, kde a_8 je délka strany pravidelného 8-úhelníka.

Pro $n = 10$ máme

$$\sin\frac{2\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{10} \cdot (2\cos\frac{\pi}{10} + 1) < 3 \cdot \sin\frac{\pi}{10} < 3 \cdot \frac{\pi}{10} < 1.$$

Takže nejsou žádná řešení pro n sudé, $n \geq 10$, neboť $f(n) = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}$ je klesající funkce.

Prošli jsme všechny přípustné hodnoty n a zjistili jsme, že půdorysem hradu mohl být pouze pravidelný 9-úhelník.

Příklad 5.6. Zatímco Matěj bádal po místních památkách, přišli ke Klevrům zástupci Lenošína. Opět si nevěděli rady s nějakým příkladem. Starý dobrák Henry jim samozřejmě pomohl. Lenošínští po něm chtěli, aby dokázal, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{(2n)!}{(n!\,n!)} < 2^{2n}$ a že číslo $\frac{(2n)!}{(n!\,n!)}$ je dělitelné všemi prvočísly p, která splňují $n < p < 2n$ (Henry samozřejmě musel také dokázat, že číslo $\frac{(2n)!}{(n!n!)}$ je celé). Když se to Henrymu povedlo, měli v záloze ještě jeden problém: Nechť $\pi(x)$ značí počet prvočísel menších nebo rovných x. Ukažte, že pro všechna přirozená $n > 1$ platí $\pi(2n) < \pi(n) + \frac{2n}{\log_2 n}$. Dovedli byste též pomoci Lenošínským?

Řešení. Číslo $\frac{(2n)!}{n!n!}$ je rovno počtu možností, jak z $2n$-prvkové množiny vybrat n prvků (nezáleží na jejich pořadí), proto je celé. Dokažme si to: pro výběr prvního prvku máme $2n$ možností, pro výběr druhého $2n-1, \ldots$, pro výběr posledního $n+1$ možností. To je celkem $(2n)!/n!$ možností. Tady nám však záleželo na pořadí, proto musíme tento počet vydělit počtem permutací n prvků - tj. $n!$. Nerovnost $(2n)!/(n!n!) < 2^{2n}$ dokážeme indukcí.

1. Pro $n = 1$ máme $2 < 4$.

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme jej pro $n+1$:

$$\begin{aligned} &\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!(n+1)!]} = \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!n!)} < \frac{(2n+2)^2}{(n+1)^2} \cdot 2^{2n} = \\ &= 4 \cdot 2^{2n} = 2^{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Každé prvočíslo p s vlastností $n < p < 2n$ dělí čitatele zlomku $(2n)!/(n!n!)$ a nedělí jeho jmenovatele. Protože číslo $(2n)!/(n!n!)$ je celé, je dělitelné p. Počet prvočísel p splňujících $n < p < 2n$ se pro $n > 1$ dá vyjádřit jako $\pi(2n) - \pi(n)$, neboť $2n$ není prvočíslo. Protože každé takové prvočíslo dělí číslo $(2n)!/(n!n!)$, je toto číslo dělitelné součinem všech takových prvočísel. Dostáváme tedy nerovnost

$$2^{2n} > \frac{(2n)!}{n!n!} > \prod_{n<p<2n,\ \text{p-prvočíslo}} p > n^{\pi(2n)-\pi(n)}.$$

Zlogaritmováním dostaneme $2n > [\pi(2n) - \pi(n)] \cdot \log_2(n)$. Tato úprava byla v pořádku, neboť $\log_2$ je rostoucí funkce. Poslední nerovnost můžeme vydělit výrazem $\log_2(n)$, neboť $n > 1$, a tedy $\log_2(n) > 0$. Po drobné úpravě dostaneme požadovanou nerovnost.

Příklad 5.7. Protože Henryho už trošku trápilo, že za ním Lenošínští chodí s každým příkladem, nad kterým se jim nechce přemýšlet, pravil: „Samozřejmě se, sousedé mojí milí, těším, až přijdete opět na návštěvu, chtěl bych vás však poprosit, abyste mi s sebou donesli také řešení tohoto příkladu: Dokažte, že pro všechna přirozená $n > 2$ platí $\pi(2^n) < (\frac{1}{n}) \cdot 2^{n+1} \cdot \log_2(n-1)$. Při řešení tohoto příkladu můžete bez důkazu použít tvrzení z příkladu, který jste donesli vy mně.“ Pomozte Lenošínským s tímto příkladem, ať zase můžou na návštěvu ke Klevrovým.

Řešení. Nerovnost dokážeme indukcí:

1. Pro $n = 3$ máme $4 < 16/3$. Kvůli pozdějšímu postupu se nám bude hodit začít s indukčním krokem od $n = 4$. Pro $n = 4$ máme $6 < 8 \cdot \log_2 3$, což platí.

2. Předpokládejme, že dokazované tvrzení platí pro n, dokážeme ho pro $n+1$. Dosadíme-li do dokázané nerovnosti z minulého příkladu místo n výraz 2^n, dostaneme $\pi(2^{n+1}) < \pi(2^n) + \frac{2^{n+1}}{n}$. Podle indukčního předpokladu je pravá strana menší než $\frac{1}{n} \cdot 2^{n+1} \cdot \log_2(n-1) + \frac{2^{n+1}}{n}$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že tento výraz je pro $n \geq 4$ menší než $\frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot \log_2 n$. S touto dokazovanou nerovností provedeme několik ekvivalentních úprav.

$$\frac{1}{n} \cdot 2^{n+1} \cdot \log_2(n-1) + \frac{2^{n+1}}{n} < \frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot \log_2 n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(n-1) + 1 < \frac{2n}{n+1} \cdot \log_2 n \Leftrightarrow 2^{1+\log_2(n-1)} < n^{\frac{2n}{n+1}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{n+1} \cdot (n-1)^{n+1} < n^{2n} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{n-1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \cdot n^{n-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$$

   Výraz $(\frac{n}{n-1})^{n+1}$ je zřejmě větší než 1 a funkce $(\frac{n}{2})^{n-1}$ je rostoucí a pro $n = 4$ je rovna 8. Indukční krok je tedy dokončen.