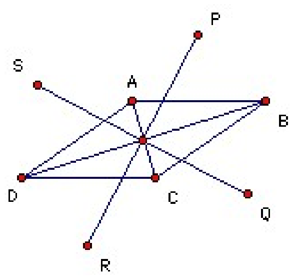
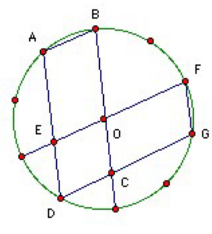
Vzorové řešení 4. série

Příklad 4.1. Jedno z mnoha náměstí v Lenošíně má tvar kosočtverce. Každou jeho stranu beze zbytku zaplňuje stejný čtvercový dům rodin Chodolenových, Ležvových, Lehmýžďových a Šnečkových. Dokažte, že středy čtvercových půdorysů těchto domů tvoří čtverec.



Řešení. Použijme označení jako na obrázku, kde $ABCD$ je kosočtvercové náměstí a P, Q, R a S jsou středy čtvercových domů. Nechť O je střed kosočtverce. Kvůli symetrii podle osy AC máme $|OP| = |OS|$. Z vlastností čtverce a kosočtverce je zřejmé, že $|\angle AOD| = |\angle ASD| = 90°$, takže $AODS$ je tětivový čtyřúhelník. Pak úhly AOS a ADS jsou obvodové úhly příslušné stejnému oblouku, takže $|\angle ADS| = 45° = |\angle AOS|$. Stejně to dopadne pro zbývající úhly s vrcholem v bodě O. Tudíž body P, O, R, resp. Q, O, S leží na jedné přímce a také platí, že úsečky PR a QS jsou na sebe kolmé, mají stejnou délku a bod O, v němž se protínají, je zároveň jejich středem. Z toho je zřejmé, že $PQRS$ je čtverec.

Příklad 4.2. V Hloupětíně mají kruhové mince, do kterých je vepsán pravidelný mnohoúhelník s takovým počtem stran, jako je hodnota mince v centech. Matěj si označil vrcholy mnohoúhelníku v deseticentové minci jako $A_1, \cdots, A_{10}$ a nyní se snaží bez použití počítačky dokázat, že $|A_1A_4| - |A_1A_2|$ je právě poloměr této mince. Pomozte Matějovi s tímto zapeklitým příkladem.



Řešení. Mějme označení podle obrázku. Jistě $AB||DG$ a $AD||BC$, takže $ABCD$ je rovnoběžník. Podobně $DEFG$ je rovnoběžník. Zřejmě BC a EF jsou součástí nejdelších úhlopříček, a proto se protínají ve středu kružnice O. Pak $|DG| = |EF| = |EO| + |OF| = |AB|+$poloměr a jsme hotovi.

Příklad 4.3. Hloupětínští se rozhodli, že se pokusí najít alespoň jeden racionální kořen polynomu $x^2 + 2mx + 2n$ o neznámé x. Dokažte, že se jim to nepodaří, pokud jsou m a n lichá čísla.

Řešení. Kořeny polynomu jsou $-m \pm \sqrt{m^2 - 2n}$. Pokud m i n jsou lichá čísla, pak $m^2 - 2n \equiv 1 - 2 \equiv 3 \pmod 4$, takže $m^2 - 2n$ nemůže být druhou mocninou celého čísla, neboť druhá mocnina celého čísla dává zbytek 0 nebo 1 po dělení čtyřmi. A protože odmocnina z přirozeného čísla je číslo přirozené nebo iracionální, jsou oba kořeny iracionální.

Příklad 4.4. Liběnka přišla se zajímavým příkladem: Součin devíti přirozených čísel je roven 150^{2006}. Měla dokázat, že součin některých dvou čísel z těchto devíti je roven čtverci přirozeného čísla. Pomozte Liběnce s tímto příkladem.

Řešení. Všichni prvočinitelé uvažovaných devíti čísel musí být prvočiniteli čísla 150^{2006}. Vzhledem k prvočíselnému rozkladu čísla 150 bude každé z devíti čísel tvaru $2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma$; kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$. Součin těchto dvou čísel je čtvercem, právě tehdy když

$$2^{\alpha_1}\, 3^{\beta_1}\, 5^{\gamma_1} \cdot 2^{\alpha_2}\, 3^{\beta_2}\, 5^{\gamma_2} = 2^{(\alpha_1+\alpha_2)}\, 3^{(\beta_1+\beta_2)}\, 5^{(\gamma_1+\gamma_2)}$$

je čtvercem, tj. když $(\alpha_1 + \alpha_2)$, $(\beta_1 + \beta_2)$ i $(\gamma_1 + \gamma_2)$ jsou sudá. Potom ve dvojicích (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2) musí být obě čísla buď sudá nebo lichá. Daných devět čísel rozdělíme do přihrádek podle toho, zda jsou čísla v trojici α, β, γ sudá nebo lichá. Dostaneme následujících osm možností:

$$(L, L, L), (L, L, S), (L, S, L), (S, L, L), (L, S, S), (S, L, S), (S, S, L), (S, S, S).$$

Máme devět čísel, proto podle Dirichletova principu dvě čísla patří do stejné skupiny, tj. jejich součin je roven čtverci přirozeného čísla.

Příklad 4.5. Matěj se vrhnul do počítání Liběnčina příkladu a aby to nebylo Liběnce líto, že nic nepočítá, dal jí také příklad. Má dokázat, že pro strany trojúhelníka a, b, c platí:

$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Pomůžete Liběnce ještě jednou?

Řešení. Nechť $A^2 = b+c-a$, $B^2 = c+a-b$, $C^2 = a+b-c$. Pak $A^2+B^2 = 2c$. Jistě $(A-B)^2 \ge 0$, takže $A^2+B^2 \ge 2AB$, a tedy $2(A^2+B^2) \ge (A+B)^2$. Z toho $4c \ge (A+B)^2$, tedy $2\sqrt{c} \ge A+B$. Analogicky dostaneme, že $2\sqrt{b} \ge A+C$ a $2\sqrt{a} \ge B+C$. Sečtením těchto nerovností dostaneme požadovanou nerovnost.

Příklad 4.6. U nás se chodí hledat houby, v Lenošíně se chodí hledat reálná čísla. A tak jako my hledáme křemenáče, tak Lenošínští hledají taková reálná čísla x, že $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pro všechna celá n. Všechna taková čísla se jim však nedaří najít a jsou celí zoufalí, zkuste jim pomoci.

Řešení. Pro $x = 0$ výraz $x^n + x^{-n}$ není definován pro žádné celé n, takže předpokládáme, že $x \neq 0$. Dále pro každé přípustné x, $x^0 + x^{-0} = 2$ je celé číslo. Protože $x^{-n} + x^{-(-n)} = x^n + x^{-n}$, stačí nám hledat taková x, pro která je daný výraz celé číslo pro libovolné přirozené n. Dále $x^n + x^{-n} = (x^1 + x^{-1}) \cdot (x^{n-1} + x^{-(n-1)}) - (x^{n-2} + x^{-(n-2)})$, takže pokud je $x^1 + x^{-1}$ celé číslo, je $x^n + x^{-n}$ celé číslo pro všechna přirozená n. Hledáme tedy všechna $x \neq 0$, pro která existuje $m \in \mathbb{Z}$ tak, že $x + \frac{1}{x} = m$. Protože $x \neq 0$, je tato je rovnice ekvivalentní s rovnicí $x^2 - mx + 1 = 0$, jejíž řešení jsou $x_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^2-4}}{2}$, která jsou reálná pro $m \neq -1, 0, 1$.
Hledaná čísla jsou tvaru $\frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^2-4}}{2}$, kde $m \in \mathbb{Z} \backslash \{-1, 0, 1\}$.

Příklad 4.7. Jen co Lenošínským otrnulo, pustili se do hledání funkcí. Pokoušejí se najít všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y rovnosti

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y)) \quad \text{a} \quad f(2006) = 2007.$$

Nikdo z Lenošína si s tím neví rady, a tak Vás celá vesnice prosí o pomoc.

Řešení. Volbou $x = -f(f(y))$ dostaneme, že $f(y) = 0$ pro nějaké y. Pak $f(x) = x + f(0)$. Z podmínky $f(2006) = 2007$ máme $f(0) = 1$, takže je jediná funkce splňující zadání určená předpisem $f(x) = x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.