Vzorové řešení 3. série

Příklad 3.1. V Lenošíně se rozhodli, že začnou zkrášlovat víceciferná přirozená čísla. Dělali to tak, že vzali libovolné číslo a udělali jeho ciferný součin. Z výsledku udělali opět ciferný součin a takto pokračovali, dokud nedostali jednociferné číslo (např. $24378 \mapsto 1344 \mapsto 48 \mapsto 32 \mapsto 6$). Dokažte, že pokud je zkrášlené číslo 1, potom původní číslo bylo složeno ze samých jedniček.

Řešení. Je zřejmé, že číslo 1 může po jednom zkrášlení vzniknout pouze z čísla složeného ze samých jedniček. Zkoumejme, zda-li můžeme ciferným součinem nějakého přirozeného čísla n získat víceciferné číslo j skládající se pouze z jedniček. Dokážeme-li, že takové n neexistuje, jsme hotovi. Pokud by n obsahovalo sudou cifru, bude j sudé, což nelze. Číslo n nemůže obsahovat ani cifru 5, protože žádné přípustné j není dělitelné 5. Kdyby n obsahovalo 3 nebo 9, bude mít j ciferný součet dělitelný 3, takže j bude dělitelné číslem 111. Poněvadž $111 = 3 \cdot 37$, je j dělitelné prvočíslem 37, takže nemohlo vzniknout součinem cifer čísla n. Číslo n se tedy může skládat pouze z cifer 1 a nenulového počtu cifer 7, takže j je mocnina čísla 7. Ale podíváme-li se na zbytky po dělení čísla 7^i pro $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ číslem 100, dostaneme postupně $7, 49, 43, 1, 7, 49, 43, 1, \ldots$. Tudíž j nemůže být mocninou čísla 7, neboť j dává po dělení číslem 100 zbytek 11. Pro číslo n nám už zbývají pouze čísla skládajících se ze samých jedniček a jejich zkrášlením vždy dostaneme číslo 1. Takže číslo j nemůžeme získat zkrášlením žádného přirozeného čísla.

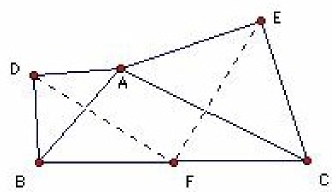
Příklad 3.2. Lenošínští si všimli zajímavé skutečnosti, že pokud mají daný bod P uvnitř konvexního mnohoúhelníku M a udělají kolmé průměty bodu P na všechny přímky, na kterých leží strany mnohoúhelníku M, potom alespoň jeden z těchto průmětů leží na straně mnohoúhelníku. Jenomže už byli líní, aby to dokázali. Zvládnete to místo nich?

Řešení. Nechť AB je strana mnohoúhelníku M s vlastností, že vzdálenost P od přímky AB je menší nebo rovna než vzdálenosti P od přímek, na kterých leží ostatní strany mnohoúhelníku M. Předpokládejme, že bod Q, který je průmětem bodu P na přímku AB, neleží na úsečce AB. Pak z konvexnosti M plyne, že Q leží vně M, tudíž úsečka PQ protne nějakou stranu mnohoúhelníku M v bodě, který si označíme R. Pak vzdálenost P od této strany je menší nebo rovna $|PR| < |PQ|$, což je rovno vzdálenosti P od AB. To je spor s tím, že vzdálenost P od AB je menší nebo rovna vzdálenosti P od přímek, na kterých leží další strany M.

Příklad 3.3. Matěj s Liběnkou se vydali dovádět. Jeli si tak krásně po cyklostezce pestrobarevnou hloupětínskou přírodou a vymýšleli zajímavé příklady. Matěj si všiml neobvyklé skutečnosti, že číslo 6 se dá zapsat jako součet i součin té samé posloupnosti přirozených čísel ($6 = 3 + 2 + 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1$). Liběnku hned zajímalo, jestli existují ještě jiná taková čísla. Pomozte Klevrovým najít všechna taková přirozená čísla, která se dají zapsat jako součet i součin té samé posloupnosti přirozených čísel.

Řešení. Dokážeme, že zadání vyhovují právě všechna složená přirozená čísla. Budeme samozřejmě uvažovat posloupnosti alespoň dvou čísel. Každé prvočíslo lze jako součin aspoň dvou přirozených čísel vyjádřit pouze součinem jeho samého s několika jedničkami, takže součin takové posloupnosti čísel bude menší než součet. Uvažujme složená čísla ab, kde $a, b \geq 2$. BÚNO nechť $a \geq b$, takže $a \cdot (b-1) \geq b$, tudíž $ab \geq a + b$. Díky tomu lze zřejmě posloupnost $a, b, \ldots$ doplnit vhodným počtem jedniček tak, aby součet i součin této posloupnosti byl roven ab.

Příklad 3.4. Mezitím přišel z práce domů Henry a náležitě si užíval odpoledne. Děti byly venku, tak rozdělal oheň v krbíku, uvařil si kávičku, zasedl do křesílka a začal si číst noviny. Než stačil přelouskat první stránku, ozval se zvonek a ve dveřích stál upovídaný soused Bedřich Zapomněl. Henry zrovna neměl náladu na dlouhé povídání, ale Béďa se nedal odbýt:



„Tož sousede, poslouchám rádio a tam soutěž, máš daný trojúhelník ABC. Pak víš, že F je střed BC, E je vrchol pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou AC a D je vrchol pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou AB. Tož Henry, tady jsem ti to čárnul. Ty jo a máš dokázat, že trojúhelník DFE je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.“ Henry věděl, že pokud sousedovi neslíbí, že se na to podívá, tak se ho nezbaví. Pomůžete Henrymu?

Řešení. Označme strany i úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Pak zřejmě $|CE| = |AE| = \frac{b}{\sqrt{2}}$ a $|BD| = |AD| = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Dále $\cos(2\pi - x) = \cos x$, takže bez ohledu na to, jestli je $\alpha + \frac{\pi}{2}$ menší, rovno nebo větší než π, je podle kosinové věty pro trojúhelník DAE (pokud D, A, E leží na přímce, vzorec také platí)

$$|DE|^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - bc \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha).$$

Opět s využitím kosinové věty máme

$$|FD|^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{ac}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} + \beta)$$

a

$$|FE|^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} + \gamma).$$

Aby byl trojúhelník DFE rovnoramenný, musí být $|FD| = |FE|$. To nastane, právě když

$$\begin{aligned} |FD|^2 = |FE|^2 \Leftrightarrow \frac{c^2}{2} - \frac{ac}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} + \beta) = \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} + \gamma) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 - \sqrt{2} \cdot ac \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\beta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\beta) = \\ = b^2 - \sqrt{2} \cdot ab \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\gamma - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\gamma) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2c^2 - 2ac \cdot \cos\beta - 2b^2 + 2ab \cdot \cos\gamma = 2a \cdot (b \cdot \sin\gamma - c \cdot \sin\beta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podle sinové věty v trojúhelníku ABC je $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, tzn. $b \cdot \sin\gamma - c \cdot \sin\beta = 0$. Dále z kosinové věty pro stejný trojúhelník je

$$2ac \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

Takže (3.1) je ekvivalentní s rovností $2c^2 - a^2 - c^2 + b^2 - 2b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = 0$, která platí, takže trojúhelník DFE je rovnoramenný. Aby byl trojúhelník DFE pravoúhlý, musí být podle Pythagorovy věty $|DE|^2 = |FD|^2 + |FE|^2$. To nastane, právě když

$$\begin{aligned} -bc \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{a^2}{2} - \frac{ac}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \beta) - \frac{ab}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + \gamma) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2bc \cdot \sin\alpha = a^2 - ac \cdot (\cos\beta - \sin\beta) - ab \cdot (\cos\gamma - \sin\gamma). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Označme S obsah trojúhelníka ABC. Podle známého vzorce platí

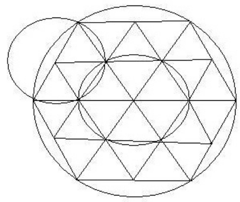
$$2S = ab \cdot \sin\gamma = bc \cdot \sin\alpha = ac \cdot \sin\beta.$$

Pak (3.2) je ekvivalentní s rovností

$$4S = a^2 - ac \cdot \cos\beta - ab \cdot \cos\gamma + 2S + 2S \Leftrightarrow 0 = 2a^2 + b^2 - a^2 - c^2 + c^2 - a^2 - b^2,$$

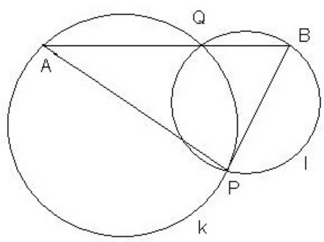
což platí, takže trojúhelník DFE je pravoúhlý.

Příklad 3.5. Když se Matěj s Liběnkou vrátili a viděli, jak jejich tatínek vztekle sedí nad sousedovým příkladem, ani si netroufli ho požádat o pomoc se svým domácím úkolem. Měli dokázat, že kruh o poloměru 2 lze pokrýt sedmi kruhy o poloměru 1. Pomůžete také dětem?



Řešení. Je zřejmé, že pokud do kruhu vepíšeme pravidelný šestiúhelník (ten bude mít délku strany stejnou, jako je poloměr kruhu, tedy 2), který rozdělíme na rovnostranné trojúhelníky podle obrázku, bude mít každý rovnostranný trojúhelník délku strany 1. Z toho je vidět, že pokud umístíme sedm kruhů o poloměru 1 tak, že jeden bude mít střed totožný se středem velkého kruhu a šest bude mít středy ve středech stran pravidelného šestiúhelníku, pak pokryjí kruh o poloměru 2.

Příklad 3.6. V Hloupětíně měli kruhové koupaliště. Avšak nadaných matematiků, kteří se v létě rádi osvěží ve studené vodě, stále přibývalo, a tak bylo rozhodnuto o jeho rozšíření. Ke stávajícímu bazénu přibyl ještě další kruhový bazén tak, že se z něj dá přeplavat do původního a naopak. Napříč těmito bazény vede ještě lávka délky a tak, že začíná na okraji jednoho bazénu, vede přes místo, kde se setkávají okraje obou bazénů, a končí na okraji druhého bazénu. Narýsujte celé koupaliště, tedy společným bodem dvou protínajících se kružnic veďte úsečku délky a takovou, že její krajní body leží každý na jedné z kružnic.



Řešení. Použijeme označení, které je na obrázku. Víme, že $|AB| = a$. Dále úhly PAQ a PBQ jsou obvodové úhly odpovídající tětivě PQ na kružnici k, resp. l. Tyto úhly snadno sestrojíme tak, že na oblouku PQ kružnice k, resp. l zvolíme body K, resp. L ležící vně kružnice l, resp. k. Pak $|\angle PKQ| = |\angle PAQ|$ a $|\angle PLQ| = |\angle PBQ|$. Takže podle věty *usu* můžeme sestrojit trojúhelník, který je shodný s trojúhelníkem ABC a z něj získáme $|AP| = x$. Zbytek konstrukce je zřejmý. Podle toho, kolik bodů na kružnici k má vzdálenost x od bodu P a podle toho, jestli přímka vedená z těchto nových bodů bodem Q protne kružnici l za bodem Q, má úloha 0 až 2 řešení.

Příklad 3.7. Matěj s Liběnkou se jednoho podzimního dne vrátili ze školy celí přepadlí. Dostali domácí úkol a vůbec si s ním nevěděli rady. A protože Henry odjel pryč, neměl jim s ním kdo pomoci. Pomozte jim, prosím, vyřešit tento úkol: Ukažte, že pro všechna přirozená $n > 1$ lze množinu $\{1, 2, ..., 2^n\}$ rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny S, T tak, že

$$\sum_{k \in S} k^m = \sum_{l \in T} l^m$$

pro všechna $m = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Řešení. Úlohu vyřešíme matematickou indukcí vzhledem k n.
1) Pro $n = 2$ položme $S := \{1, 4\}$, $T := \{2, 3\}$. Daná rovnost je zřejmě splněna pro $m = 0$ i $m = 1$.
2) Předpokládejme, že množiny S, T jsou řešením úlohy pro n. Dokážeme, že množiny $S_1 = S \cup \{t + 2^n / t \in T\}, T_1 = T \cup \{s + 2^n / s \in S\}$ jsou řešením úlohy pro $n + 1$. Pro $m < n$ máme

$$\sum_{k \in S_1} k^m = \sum_{k \in S} k^m + \sum_{l \in T} (2^n + l)^m = \sum_{k \in T} k^m + \sum_{l \in S} (2^n + l)^m = \sum_{k \in T_1} k^m.$$

Ve druhé rovnosti jsme využili roznásobení $(2^n + l)^m$ podle binomické věty a toho, že rovnost

$$\sum_{k \in T} k^{m_0} = \sum_{k \in S} k^{m_0}$$

platí pro všechna $m_0 \leq m$. Zbývá nám dokázat, že sumy jsou stejné pro $m = n$. V tomto případě máme

$$\sum_{k \in S_1} k^n = \sum_{k \in S} k^n + \sum_{l \in T} (2^n + l)^n$$

a opět využijeme binomickou větu. Pro všechny členy k^{n_0}, kde $n_0 < n$ je

$$\sum_{l \in T} k^{n_0} = \sum_{k \in S} k^{n_0}.$$

Členy k^n jsou v sumách pro S_1 i pro T_1 zastoupeny stejně, konkrétně

$$\sum_{k \in S} k^n + \sum_{l \in T} l^n.$$

Takže sumy pro množiny S_1 i T_1 jsou stejné i pro $m = n$, což bylo potřeba dokázat.