Vzorové řešení 2. série

Příklad 2.1. V Lenošínských novinách proběhla nedávno soutěž. Samozřejmě šlo o matematickou soutěž. Kromě klasických číselných rébusů se zde objevil i úkol najít všechny trojice reálných čísel x, y, z splňující soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ xy - z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Vyřešili byste tuto soustavu?

Řešení. Z rovnice $x + y = 2$ plyne, že alespoň jedno z čísel x, y je kladné. Pokud je druhé z těchto čísel záporné, je $xy < 0$, takže rovnost $xy - z^2 = 1$ nemůže být splněna. Máme $x, y \geq 0$ a pro ně platí AG nerovnost:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \tag{1}$$

Rovnost nastane, právě když $x = y$. S využitím první rovnice ze zadání platí $\sqrt{xy} \leq 1$, tudíž $xy \leq 1$. Pak platí: $1 = xy - z^2 \leq xy \leq 1$, tudíž $xy = 1$ a $z = 0$. V (1) nám nastala rovnost, tedy $x = y$, a protože $x + y = 2$, je $x = y = 1$.

Soustavu rovnic ze zadání splňuje jediná trojice reálných čísel $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

Příklad 2.2. S předchozím příkladem si Lenošínští úspěšně poradili. Nad dalším soutěžním příkladem se jim však už nechtělo přemýšlet, a tak zajeli do Hloupětína za Henry Klevrem s prosbou o pomoc. Měli dané dvě kružnice k, l a přímku q. Jejich úkolem bylo sestrojit přímku p rovnoběžnou s q tak, aby součet délek tětiv, které na přímce p vytínají kružnice k a l, měl danou velikost a. Pomožte Lenošínským vyřešit tento příklad.

Řešení. Přímka p splňující zadání může vytínat tětivu nenulové délky na jedné ze zadaných kružnic (možnost 1.) nebo na obou kružnicích (možnost 2.).

1.

Označme K střed kružnice k. Bodem K veďme přímku q', která je kolmá na q. Každá tětiva kružnice k, jež je rovnoběžná s přímkou q, je zřejmě protínána přímkou q' ve svém středu. Nechť p' je přímka rovnoběžná s q' s vlastností

$|p', q'| = \frac{a}{2}$. Je zřejmé, že přímka p, která je řešením splňujícím podmínky možnosti 1., musí procházet průsečíkem přímky p' a kružnice k. Potenciálními řešeními jsou tedy rovnoběžky s q procházející průsečíkem k a p'. Z těchto řešení je nutné vyloučit ty přímky, které kružnici l protínají ve dvou bodech (tečny ke kružnici l samozřejmě vyloučit nemůžeme). Při konstrukci p' jsme měli na výběr ze dvou různých přímek, ale ať vybereme kteroukoliv z nich, vždy dostaneme stejná řešení. Podle toho, kolik bodů má společných k a p' a kolik potenciálních řešení jsme vyloučili, máme 0 až 2 řešení. Stejným způsobem získáme 0 až 2 řešení, která protínají ve dvou bodech kružnici l a neprotínají ve dvou bodech kružnici k. Takže v této části můžeme dostat 0 až 4 řešení.

2.

V průběhu řešení budeme potřebovat, aby kružnice k a l byly od sebe „dostatečně daleko“; tato vzdálenost bude později specifikována. Zřejmě platí, že přímka p je řešením pro kružnice k, l právě když je řešením pro kružnice m, n, které vzniknou z k, l posunutím ve směru rovnoběžném s přímkou q o libovolné délky. BÚNO[1] můžeme s využitím tohoto tvrzení předpokládat, že kruhy k a l jsou disjunktní. Mějme označení jako na obrázku, kde přímka p je řešením úlohy. Pak platí (díky tomu, že kruhy k a l jsou disjunktní):

$$|K'L'| = |K'B| + |BC| + |L'C| = (|AB| + |CD|)/2 + |BC| = a/2 + |BC|,$$

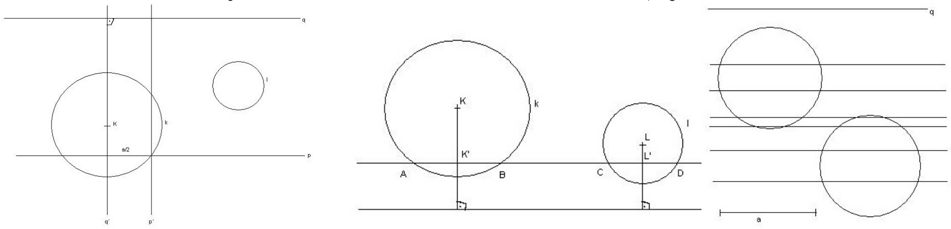
takže

$$|BC| = |K'L'| - a/2.$$

Vzdálenost $|K'L'|$ je rovna délce úsečky, která je kolmým průmětem úsečky KL na přímku q. Zde může nastat problém v tom, že pro zadané kružnice bude $|K'L'| - \frac{a}{2} < 0$, takže bychom nemohli pracovat s délkou $|BC|$, neboť délka úsečky nemůže být záporná. S tím se vypořádáme tak, že např. kružnici k posuneme ve směru rovnoběžném s přímkou q tak, aby velikost kolmého průmětu úsečky, jejímiž krajními body jsou L a střed nové kružnice k_0, byla větší než $\frac{a}{2}$. Budeme-li úlohu řešit pro kružnice k_0 a l, podle výše uvedeného tvrzení získáme stejné řešení jako pro kružnice k a l. Víme tedy, že bod B vznikne z bodu C posunutím o kladnou vzdálenost $|K'L'| - \frac{a}{2}$. Tudíž B leží na kružnici k a také na kružnici l', která vznikne z l posunutím o $|K'L'| - \frac{a}{2}$ ve směru $L'K'$. Získali jsme bod B (pokud se kružnice protly). Přímka p procházející bodem B je rovnoběžná s q je tedy řešením úlohy. V závislosti na počtu společných bodů kružnic k a l' jsme získali 0 až 2 další řešení.

[1]bez újmy na obecnosti

Celkem tedy můžeme dostat až 6 řešení, jak lze vidět na obrázku.



Příklad 2.3. Matěj s Liběnkou se posmívali svému taťkovi, jak že mu dlouho trvá konstruování předešlého příkladu. Henry se už už chystal vynadat Matějovi a Liběnce za jejich pošklebování, nakonec si to však rozmyslel a dal jim každému jeden příklad, zda ho spočítají dřív oni nebo on. Matěj měl najít všechna trojciferná čísla $n = abc$ taková, že $\frac{2n}{3} = a! \cdot b! \cdot c!$ Dokázali byste to také?

Řešení. Zřejmě $\frac{2n}{3} < 1000 < 7!$, takže $a, b, c \leq 6$. Tudíž $n \leq 666$, z toho $\frac{2n}{3} \leq 444$ a tedy $a \leq 4$. Protože $6! > 444$, je $b, c \leq 5$.

Nejprve předpokládejme, že $a = 4$. Potom $b!\, c! = \frac{2n}{3} \cdot \frac{1}{a!} \leq \frac{2 \cdot 455}{3 \cdot 24} < 13$. Pak jistě $b, c \leq 3$. Ze zadání plyne, že $2n$ je dělitelné $3 \cdot a!$, takže n je dělitelné 9. To nastane, právě když ciferný součet čísla n (tento součet je roven $a + b + c$) je dělitelný 9, tudíž $\{b, c\} = \{2, 3\}$ a z toho $n = \frac{3}{2}\, 4!\, 3!\, 2! = 432$, takže jediné řešení pro $a = 4$ je číslo 432.

Nyní předpokládejme, že $a = 3$. Pak $n = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot b!\, c! = 9 \cdot b!\, c!$, takže potřebujeme, aby $300 < 9 \cdot b!\, c! < 355$ a tedy $33 < b!\, c! < 40$. Z toho $b, c \leq 4$, ale $4! < 33$ a $2 \cdot 4! > 40$, tudíž $b, c \leq 3$. Aby bylo $33 < b!\, c! < 40$, máme jedinou možnost: $b = c = 3$. Ale $\frac{3}{2}\, 3!\, 3!\, 3! = 324 \neq 333$, takže pro $a = 3$ úloha nemá řešení.

Nechť $a = 2$. Pak $n = 3 \cdot b!\, c!$ a dostáváme $200 < 3 \cdot b!\, c! < 255$. Ale $3 \cdot 5! > 255$ a $3 \cdot 3!\, 3! < 200$, z toho plyne, že aspoň jedno z čísel b, c musí být rovno 4. Pokud druhé z nich je x, potom $\frac{200}{72} \leq x! \leq \frac{255}{72}$, takže $x! = 3$, což není možné. Pro $a = 2$ úloha nemá řešení.

Nakonec nechť $a = 1$. Pak $n = \frac{3}{2}\, b!\, c!$, tudíž $\frac{2}{3} \cdot 100 \leq b!\, c! \leq \frac{2}{3} \cdot 155$, a tedy $67 \leq b!\, c! \leq 103$. Ale $5! > 103$ a $3!\, 3! < 67$, takže jedno z čísel b, c musí být 4. Pokud druhé z nich je x, máme $2,7 < x! < 4,4$ a pak $x! = 3$ nebo 4, což opět není možné.

Jediné trojciferné číslo vyhovující zadání je 432.

Příklad 2.4. No a Liběnka měla zase najít všechna přirozená čísla, která jsou součtem druhých mocnin svých čtyř nejmenších dělitelů. Zvládli byste i Liběnčin příklad?

Řešení. Přirozené číslo n splňující zadání nemůže být liché, neboť jeho čtyři nejmenší dělitelé budou lichá čísla a součet jejich druhých mocnin bude sudý.

Takže dva nejmenší dělitelé budou 1 a 2. Pokud $4|n$, pak čtyři nejmenší dělitelé budou $1, 2, 4, 8$ nebo $1, 2, 4, p$ (kde p je liché prvočíslo). V prvním případě je součet druhých mocnin lichý, ale n je sudé - spor. Ve druhém případě máme $21 + p^2 = 4pm$, kde $m = n/4p$ je přirozené číslo. Z toho plyne $p\,|21$, takže $p = 3$ nebo $p = 7$. Ale pak $4 \nmid 21 + p^2$, spor.

Číslo n tedy musí být dělitelné 2, ale ne 4. Nechť p je nejmenší liché prvočíslo dělící n (takové prvočíslo existuje, neboť zřejmě $n > 2$). Pak tři nejmenší dělitelé jsou $1, 2, p$. Pokud další nejmenší dělitel je lichý, jsou tři ze čtyř nejmenších dělitelů lichá čísla a pak součet druhých mocnin je lichý, což je spor se sudostí n. Takže další nejmenší dělitel n musí být $2p$. Dostáváme rovnici $5 + 5p^2 = 2pm$. Z toho máme $5\,|n$, tím pádem $p = 3$ nebo $p = 5$. Pro $p = 3$ je součet druhých mocnin roven 50, ale $3 \nmid 50$ - spor. Pro $p = 5$ máme $n = 130$, což vyhovuje zadání.

Řešením úlohy je číslo 130.

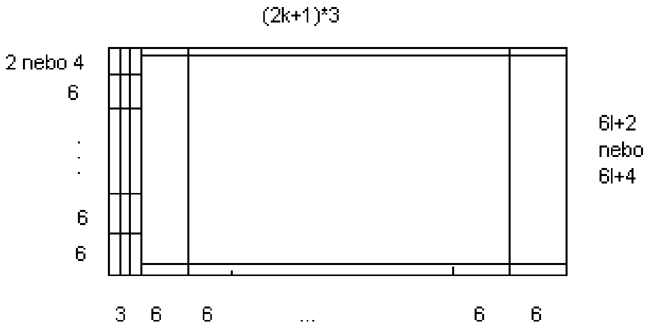
Příklad 2.5. Henry vyřešil svůj příklad rychleji než Matěj s Liběnkou, a tak mu musely děti koupit čokoládu. Čokoláda měla m x n dílků. Děti ji rozlámaly na obdelníčky 1 x 6 dílků. Takto rozlámanou čokoládu podávaly výherci se slovy: „Dostaneš, tati, tuto čokoládu, pokud dokážeš, že m nebo n je dělitelné šesti.“ Henry se vcelku zapotil, ale nakonec si čokoládu skutečně zasloužil... Dokázali byste si také vybojovat sladkou odměnu?

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že děti rozlámaly čokoládu podle zadání a že m ani n nejsou dělitelné šesti. Počet dílků v čokoládě je násobek 6, takže počet dílků na jedné straně musí být lichý násobek 3 a počet dílků na druhé straně bude dávat zbytek 2 nebo 4 po dělení 6. Dílky čokolády obarvíme šesti barvami následujícím způsobem:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & \cdots \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array}$$

Z obrázku jde vidět, že z čokolády lze odlamovat obdélníčky o rozměru 1 x 6 dílků tak, že nakonec zbyde jedna z těchto dvou částí čokolády:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ & & \\ & & \end{array}$$



Každý obdélníček 1 x 6 obsahuje právě jeden dílek obarvený každou ze šesti barev. Ale obě dvě zbylé části čokolády neobsahují stejný počet dílků od každé barvy. Takže počty dílků od jednotlivých barev z celé čokolády nejsou všechny stejné. To je spor s tím, že děti čokoládu rozlámaly na obdélníčky 1 x 6.

Příklad 2.6. Henry si svoji odměnu náležitě vychutnával. Když však viděl, jak ho pozorují 4 mlsná očka, rozhodl se, že se musí rozdělit. Nechtěl však dát svým dětem nic zadarmo a tak pravil, že dostanou čokoládu, pokud vyřeší tento příklad: Uvnitř čtverce $ABCD$ o straně délky 1 je umístěno 288 bodů. Ukažte, že existuje množina S úseček délky 1, které jsou rovnoběžné s AB a spojují strany AD a BC, pro niž existuje taková množina T úseček spojujících každý z 288 daných bodů s úsečkou patřící do S, aby součet délek všech úseček z množin S a T byl menší než 18.3. Podaří se vám tento příklad vyřešit dřív, než Henry sní všechnu čokoládu?

Řešení. Uvažme množinu 24 rovnoběžných, rovnoměrně od sebe vzdálených spojnic stran AD a BC, mezi něž počítáme strany čtverce AB a CD. Vzdálenost mezi dvěma sousedními úsečkami je $\frac{1}{23}$. Úsečky střídavě obarvíme na modrou a zelenou. Nechť M je součet vzdáleností 288 bodů od nejbližší modré úsečky a Z součet vzdáleností od nejbližší zelené úsečky. Pro každý bod je součet vzdáleností k nejbližší modré a zelené úsečce roven $\frac{1}{23}$, neboť každý bod leží v pruhu šířky $\frac{1}{23}$, který je ohraničený modrou a zelenou úsečkou. Pak $M + Z = \frac{288}{23}$, takže $M \leq \frac{144}{23}$ nebo $Z \leq \frac{144}{23}$. Položíme-li za S množinu 12 úseček odpovídající menšímu z čísel M, Z, dostaneme celkovou délku úseček a spojnic bodů s úsečkami nejvýše rovnu $12 + \frac{144}{23} = 18\frac{6}{23} < 18,3$, což jsme měli dokázat.

Příklad 2.7. Matěj s Liběnkou si svoji odměnu také vybojovali. A už už chtěli zase pokoušet Henryho, ale ten je rázně zastavil. Hrát si budeme, až si uděláte všechny úkoly do školy. Matěj s Liběnkou zklamaně odešli k učení.

Naštěstí však měli jediný úkol a to z matiky. Pomožte dětem vyřešit tento příklad: Je dán trojúhelník ABC a bod P, který leží uvnitř tohoto trojúhelníku. Dále víme, že trojúhelníky PAB, PBC, PCA mají stejný obsah a také stejný obvod. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný. Dále dokažte, že pokud P leží mimo trojúhelník ABC, je tento trojúhelník pravoúhlý.

Řešení. Předpokládejme, že bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Označme S_{XYZ} obsah trojúhelníka XYZ a o_{XYZ} jeho obvod. Víme, že $S_{PAB} = S_{PBC}$, takže

$$\frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |AB| \cdot \sin|\angle ABP| = \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |CB| \cdot \sin|\angle CBP|$$

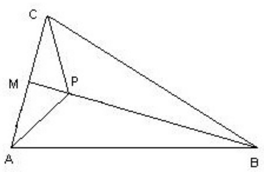
a tedy

$$|AB| \cdot \sin|\angle ABP| = |CB| \cdot \sin|\angle CBP| \tag{2}$$

Dále označme M průsečík přímky BP a strany AC. Pak

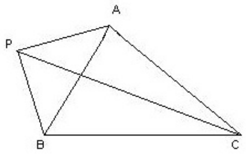
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |MB| \cdot \sin|\angle AMB| = S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MB| \cdot \sin|\angle ABP| \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot |CB| \cdot |MB| \cdot \sin|\angle CBP| = S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |MB| \cdot \sin|\angle CMB| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |MB| \cdot \sin(180^\circ - |\angle AMB|) = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |MB| \cdot \sin|\angle AMB|.
\end{aligned}$$

Z toho dostáváme $|AM| = |CM|$, takže BM je těžnice trojúhelníka ABC, bod P leží na těžnici vedené z bodu B. Analogicky se dokáže, že bod P leží na dalších dvou těžnicích, P je tedy těžiště trojúhelníka ABC.



Nyní předpokládejme, že $|\angle ABC| < |\angle ACB|$. Pak $|AB| > |AC|$ a $|PB| > |PC|$, takže $o_{PAB} > o_{PAC}$, spor se zadáním. Ke sporu podobně dospějeme pokud bude $|\angle ABC| > |\angle ACB|$, takže musí být $|\angle ABC| = |\angle ACB|$. Analogicky dojdeme k tomu, že další úhly v trojúhelníku ABC jsou shodné, takže trojúhelník ABC je rovnostranný.

Nyní předpokládejme, že bod P leží mimo trojúhelník ABC. BÚNO nechť A a B leží v opačných polorovinách určených přímkou PC. Pak A a C leží ve stejné polorovině určené přímkou PB (zde využíváme, že P leží vně trojúhelníku).



Protože $S_{PBC} = S_{PBA}$, musí být A a C stejně vzdálené od PB, takže AC je rovnoběžná s PB. Obdobně se dokáže, že PA je rovnoběžná s BC, tudíž $PACB$ je rovnoběžník. Z podmínky $o_{PBC} = o_{PBA}$ a z $|PA| = |BC|$ dostáváme $|PC| = |AB|$, takže $PACB$ je obdélník a $|\angle ACB| = 90°$.