Vzorové řešení 1. série

Příklad 1.1. Rodina Klevrů vyrazila na dovolenou. Aby jim cesta vlakem rychle ubíhala, hráli různé hry. Jednou z nich bylo hádání čísel. Matěj pořád prohrával, už z toho byl celý otrávený a všichni se mu posmívali. A to ho štvalo možná nejvíce. Najednou se mu však zajiskřilo v očích a pravil: „Myslím si libovolné přirozené číslo. Jednu číslici z něho vyškrtnu. Od takto vzniklého nového čísla odečtu ciferný součet původního čísla. A teď, moji drazí, pokud vám řeknu výsledek, dokážete určit, kterou číslici jsem vyškrtl?“ Rodina se vcelku zapotila, než na to došel Matějův tatínek Henry. Přijdete na to také?

Řešení 1.1. Nejdříve dokážeme, že $9|(n - S(n))$, kde n je přirozené číslo a $S(n)$ je ciferný součet čísla n.
Nechť $n = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_0$. Pak $S(n) = a_n + \cdots + a_0$ a tedy $n - S(n) = a_n \cdot (10^n - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10 - 1) = a_n \cdot 9 \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1) + \cdots + a_1 \cdot 9$, takže $9|(n - S(n))$.
Označme si $n = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ původní číslo, a_l vyškrtnutou číslici a n' číslo, které vzniklo z n po vyškrtnutí a_l. Zřejmě výsledek, který by nám Matěj případně sdělil, se dá vyjádřit jako $n' - S(n)$. Jistě platí: $n' - S(n) = n' - S(n') - a_l = 9 \cdot k - a_l$ pro nějaké celé číslo k, tudíž $a_l = 9 \cdot k + S(n) - n'$. Takže číslice a_l dává stejný zbytek po dělení 9 jako číslo $S(n) - n'$. Podíváme se, jaký zbytek po dělení 9 dává $p = (-1)\cdot$ (číslo, které nám Matěj sdělil), a v případě, že $9 \nmid p$, je jasná hodnota a_l. Pokud $9|p$, může být a_l rovno 0 nebo 9 a postupujeme následovně:
K číslu obdrženému od Matěje přičteme 9, výsledek vydělíme devíti a pak postupně dělíme čísly $111\ldots11, \ldots, 111, 11$. Vždycky nám vyjde neúplný podíl $0, \ldots, 9$. Zbytek pak dělíme následujícím číslem a postup opakujeme. Vyjde-li závěrečný zbytek (tj. zbytek po dělení 11) 0, je vyškrtnutá číslice 9, je-li zbytek 10, je vyškrtnutá číslice 0. Ve zbylých případech nemůžeme rozhodnout. K důkazu tohoto postupu použijeme výše uvedené označení. Dále jistě $n' = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_{l+1} \cdot 10^l + a_{l-1} \cdot 10^{l-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, a tedy $n' - S(n) + 9 = a_n \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_{l+1} \cdot (10^{l-1} + a_{l-1} \cdot (10^{l-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot 9 - a_l + 9 = -a_l + 9 \cdot (1 + a_1 + 11 \cdot a_2 + \cdots + 11\ldots11(l-1\text{jedniček}) \cdot a_{l-1} + 11\ldots11(\text{l jedniček}) \cdot a_{l+1} + 111\ldots11(n-1 \text{ jedniček}) \cdot a_n)$.
V případech $l = 0, 1, 2$ to vypadá jinak; sami si rozmyslete, jak. Pak platí: $a_l = 0 \Leftrightarrow n' - S(n) + 9 = 9 \cdot (1 + a_1 + 11 \cdot a_2 + \cdots + 11\ldots11(l-1 \text{ jedniček}) \cdot a_{l-1} + 11\ldots11(\,l\,\text{jedniček}) \cdot a_{l+1} + 111\ldots11 \cdot a_n)$ a také $a_l = 9 \Leftrightarrow n' - S(n) + 9 =$

$9 \cdot (a_1 + 11 \cdot a_2 + \cdots + 1111(l-1 \text{ jedniček}) \cdot a_{l-1} + 11\ldots 11(l \text{ jedniček}) \cdot a_{l+1} + 111\ldots 11 \cdot a_n)$. Postupem popsaným výše tedy dostaneme v prvním případě hodnotu $a_1 + 1$ (v případě $l = 0$ nebo $l = 1$ dostaneme $a_2 + 1$), ve druhém a_1 (opět v případech $l = 0, 1$ dostaneme a_2). Pokud je výsledek 10, je nutně $a_1 = 9$ (resp. $a_2 = 9$) a $a_l = 0$. Je-li výsledek 0, je $a_1 = 0$ (resp. $a_2 = 0$) a $a_l = 9$. Ve zbývajících případech, kdy výše uvedeným postupem dostaneme číslo k z množiny $1, 2, \ldots, 9$, máme dvě možnosti:

1. $a_l = 0$, $a_1 = k - 1$ (resp. $a_2 = k - 1$);
2. $a_l = 9$, $a_1 = k$ (resp. $a_2 = k$).

Spolu s ciframi získanými jako částečné podíly máme tedy dvě čísla vyhovující zadání, přičemž z jednoho byla vyškrtnuta 0, z druhého 9.

Příklad 1.2. Ani Liběnka, Matějova ségra, nevymyslela jednoduchý příklad. Myslela si přirozené číslo n takové, že jeho ciferný součin byl $n^2 - 10n - 22$. Jaká čísla si Liběnka mohla myslet?

Řešení 1.2. Nechť n má m cifer. Označme první z nich d. Potom ciferný součin je nejvýše $d \cdot 9^{m-1}$. Toto číslo je jistě menší nebo rovno $d \cdot 10^{m-1}$ a to je menší nebo rovno n. Vidíme, že ciferný součin čísla n musí být menší nebo roven samotnému číslu n. Tedy pokud od ciferného součinu odečtu číslo n, musím dostat jistě nekladné číslo, ale výraz

$$(n^2 - 10n - 22) - n = (n - \frac{11}{2})^2 - \frac{209}{4}$$

je kladný pro $n = 13$ a tudíž je kladný i pro $n > 13$, protože 13 je větší než oba kořeny rovnice. Tedy jistě $n < 13$. Ciferný součin $n^2 - 10n - 22 = (n-5)^2 - 47$ je záporný pro $n = 11$, pak je záporný i pro $0 < n < 11$, protože taková n leží mezi oběma kořeny rovnice. Zbývá nám možnost $n = 12$; snadno lze ověřit, že $n = 12$ vyhovuje zadání.

Příklad 1.3. Další hrou, kterou hráli Matěj s Liběnkou po cestě, bylo mnohoúhelníkování. S první hádankou přišel Matěj. Ptal se Liběnky na to, kolik je trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech konvexního n-úhelníku takových, že všechny tři jeho strany jsou úhlopříčkami v daném mnohoúhelníku. Liběnka po chvíli přemýšlení odpověděla správně. Věděli byste to také?

Řešení 1.3. Pro $n = 3$ je zřejmě 0 hledaných trojúhelníků. Pro $n \geq 4$ můžeme postupovat takto: Počet všech trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech konvexního n-úhelníku je $\binom{n}{3}$. Od nich musíme odečíst trojúhelníky, které mají jednu nebo dvě strany na straně n-úhelníka. Těch prvních je $n(n-4)$, protože ke každé z n stran je možné vybrat $(n-4)$-mi způsoby třetí vrchol, těch druhých je pak n, protože každý trojúhelník obsahující dvě strany z mnohoúhelníka je jednoznačne určen jejich společným vrcholem. Tedy celkem je

$$\binom{n}{3} - n(n-4) - n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$$

hledaných trojúhelníků.

Příklad 1.4. I Liběnka dala Matějovi hádanku. Měl určit počet čtverců s vrcholy ve vrcholech pravidelného n-úhelníku. Matěj to samozřejmě také hnedka věděl a Liběnka řekla, že to byl jednoduchý příklad, takže dostane ještě jeden. Po chvilce hádání Matěj ustoupil a nechal Liběnku říct ještě jednu hádanku: Uvnitř každé strany čtverce je dáno n bodů. Kolik existuje čtyřúhelníků s vrcholy v bodech na stranách čtverce? Dokázali byste také spočítat oba Matějovy příklady?

Řešení 1.4. a) Označme pravidelný n-úhelník K. Nechť A je jeden z vrcholů mnohoúhelníku K a nechť je to zároveň vrchol jednoho z hledaných čtverců. Dále označme k kružnici opsanou mnohoúhelníku K. Potom další vrcholy B, D čtverce jistě leží na průniku kružnice k s přímkami svírající úhel $45°$ s průměrem kružnice obsahujícím bod A. Čtvrtý vrchol C musí opět ležet na kružnici k a je to bod symetrický s bodem A podle středu kružnice k. Je-li n liché, pak bod C sestrojený výše zřejmě neleží na K. Podobně máme-li $n = 4k - 2$, kde k je přirozené, neleží na K body B a D. Zjistili jsme tedy, že pro n nedělitelné 4 neexistuje žádný hledaný čtverec. Zbývá nám případ, kdy $4|n$. Zde je jasné, že počet hledaných čtverců je $\frac{n}{4}$.
b) Nejprve určeme počet čtyřúhelníků, které mají každý vrchol na jiné straně. Na každé straně máme n možností, jak vrchol vybrat, tedy celkem je n^4 možných čtyřúhelníků. Nyní vypočítejme počet čtyřúhelníků, které mají 2 vrcholy na jedné straně a další vrcholy každý na straně jiné. Stranu, na které budou ležet dva vrcholy čtyřúhelníka, můžu vybrat čtyřmi způsoby, na této straně vybírám dva vrcholy z n, dále dvojici stran, na které je vždy po jednom vrcholu, můžu vybrat třemi způsoby a na každé této straně opět vybírám z n vrcholů. Tedy pro tuto možnost mám $4 \cdot \binom{n}{2} \cdot 3 \cdot n^2$. Poslední možností je, že dva vrcholy budou na jedné straně a dva na jiné straně. Dvojici stran můžu vybrat $\binom{4}{2}$ způsoby a na každé opět dva vrcholy z n. Tedy pro tuto možnost máme $\binom{4}{2}\binom{n}{2}\binom{n}{2}$ možností. Celkem to je tedy

$$n^4 + 4 \cdot \binom{n}{2} \cdot 3 \cdot n^2 + \binom{4}{2}\binom{n}{2}\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} \cdot (17n^2 - 18n + 3).$$

Příklad 1.5. Přes den si dovolenou Klevrovi náležitě užívali, a tak nebylo divu, že každý večer, jen co zalehli, hnedka usnuli. Jeden den jim však celý propršel, a tak Matěj s Liběnkou nemohli večer vůbec usnout. A tak, aby mohl Henry v klidu a nerušeně spát, vymyslel Matějovi a Liběnce tento příklad: Mají danou kružnici K a na ní tři body A, B, C. Mají najít bod D na kružnici K takový, aby čtyřúhelníku $ABCD$ šla vepsat kružnice. Přijdete na to také?

Řešení 1.5. Předpokládejme, že čtyřúhelníku lze vepsat kružnice a označme její střed I. Protože čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, platí, že součet jeho dvou protilehlých úhlů je 180°. Navíc platí, že $|\angle BAI| = \frac{1}{2}|\angle BAD|$ a také $|\angle BCI| = \frac{1}{2}|\angle BCD|$. Dohromady pak $|\angle BAI| + |\angle BCI| = 90°$. Tedy platí, že velikost úhlu (v čtyřúhelníku $AICB$) $|\angle AIC| = 270° - |\angle ABC|$, tedy velikost úhlu (v čtyřúhelníku $AICD$) $|\angle AIC| = 90° + |\angle ABC|$. Tedy dostáváme, že bod I leží na oblouku kružnice, z jehož bodů vidíme úsečku AC pod úhlem $90° + |\angle ABC|$. Navíc bod I musí ležet na ose $\angle ABC$. Tedy dokážeme nalézt bod I. Dále sestrojíme kružnici vepsanou a k ní vedeme tečny z bodů A a C a v jejich průsečíku (leží na K) je bod D.

Příklad 1.6. Matěj s Liběnkou řešili příklad, který jim Henry zadal, dlouho do noci a bylo jim jasné, že se jejich tatínek vzbudí daleko dříve než oni. Proto, aby je nebudil, napsali mu na lístek vzkaz, že je může probudit tehdy, až jim připraví snídani do postýlky a až najde všechna reálná čísla splňující rovnici $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$. Dokázali byste tento příklad také vyřešit?

Řešení 1.6. Položme substituci $c = \cos x$. Upravme $\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Dále $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$. Po provedení substituce dostáváme $c^2 + (2c^2 - 1)^2 + (4c^3 - 3c)^2 = 1$, po úpravě: $16c^6 - 20c^4 + 6c^2 = 0$. Tedy $c^2 = 0, c^2 = \frac{1}{2}, c^2 = \frac{3}{4}$. Potom $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1.7. Když Matěj s Liběnkou leželi na pláži, přišly za nimi nějaké malé děti, jestli by si s nimi nešli stavět z písku. Matěj s Liběnkou s radostí šli a nestačili se divit, co už děcka postavila. Takové krásné hrady z písku ještě neviděli. Dole pod oběma hrady vedla přímá silnice (oba hrady leží v jedné polorovině určené silnicí). Děti se rozhodly, že z jednoho místa silnice povedou přímé cesty k oběma hradům. Po Matějovi a Liběnce chtěly, aby našli takové místo na silnici, aby součet délek obou cest z tohoto místa k hradům měl danou velikost a. Dokázali byste to také?

Řešení 1.7. Předpokládejme, že vzdálenost hradů je menší než a. V opačném případě zřejmě úloha nemá řešení. Množinou bodů, které mají součet vzdáleností od hradů roven a, je elipsa s ohnisky ležícími na místech hradů a hlavní poloosou délky $a/2$. Hledáme tedy průsečíky této elipsy s danou silnicí. Vezmeme provázek délky a, jeho konce připevníme k hradům a elipsu nakreslíme tak, že se budeme po provázku (který budeme držet v jednom bodě) pohybovat tak, aby byl napnutý. Hledané body budou průsečíky elipsy se silnicí. Podle toho, kolik takových průsečíků získáme, budeme mít 0, 1 nebo 2 řešení.