Vzorové řešení 6. série XII. ročníku BRKOSu

6.1 Počet obyvatel Hloupětína je čtyřikrát menší než počet obyvatel Lenošína a končí na cifru 6. Pokud tuto cifru přemístíme z poslední pozice na první místo, dostaneme právě počet obyvatel Lenošína. Jaký je počet obyvatel Hloupětína a Lenošína, víme-li, že počet obyvatel Hloupětína je co nejmenší.

Nechť počet obyvatel Hloupětína a Lenošína má $m + 1$ cifer. Pak můžeme sestavit rovnici

$$4(10n + 6) = 6 \cdot 10^m + n,$$

kde n je číslo složené z prvních m cifer počtu obyvatel Hloupětína, což je to stejné jako posledních m cifer počtu obyvatel Lenošína.

Úpravou výrazu dostáváme

$$13n + 8 = 2 \cdot 10^m.$$

Zavedeme substituci $n = 2a$ a předchozí rovnici upravíme do tvaru

$$13a + 4 = 10^m \Rightarrow 13a = 10^m - 4.$$

Rychle zjistíme, že nejmenším a splňujícím tuto rovnici je $a = 7692$, takže $n = 15384$.

Počet obyvatel Hloupětína je tedy 153846 a počet obyvatel Lenošína 615384.

6.2 V přijímačkách na Hloupětínskou univerzitu se objevil následující příklad:

Je dána rovina a dva body. Bod K, který v rovině neleží, a bod A, který v ní leží. Pro každou přímku p ležící v rovině procházející bodem A označme H patu kolmice k přímce p procházející bodem K. Najděte množinu všech bodů H.

Vyřešili byste tento příklad?

Řešením je kružnice k nad průměrem AB, kde B je pata kolmice z bodu K na rovinu. Nyní se to pokusme dokázat.

Nechť p je libovolná přímka procházející bodem A. Tato přímka je buď tečnou naší kružnice k v bodě A nebo protíná kružnici k ve dvou bodech, v bodě A a O.

Nyní musíme dokázat, že O je patou kolmice k přímce p z bodu K. Jistě je BO kolmé k přímce AO, tedy i KO je kolmé k AO, a tedy O je pata kolmice z bodu K na přímku p.

Ještě musíme ukázat druhý směr, a to, že každý bod kružnice k je patou nějaké přímky procházející bodem A. Nechť například bod D leží na kružnici k. Označme d přímku procházející body A a D. Potom jistě BD je kolmé k AD, opět tedy KD je kolmé k AD, tedy D je jistě patou kolmice z bodu O na přímku AD, tedy d je hledanou přímkou.

6.3 Kořeny rovnice $x^3-x+1=0$ jsou čísla a, b, c. Lenošínští měli určit hodnotu výrazu $a^8+b^8+c^8$ a to by to nebyli Lenošínští, kdyby nebyli líní počítat kořeny polynomu. Přesto však tuto hodnotu určili správně. Dokázali byste to také?

Z Viétových vztahů plyne

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ ab+bc+ac &= -1 \\ abc &= -1 \end{aligned}$$

Podobně počítejme:

$$\begin{aligned} a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = (ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c) &= 1 \\ a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) &= 2 \end{aligned}$$

Přejděme ke čtvrtým mocninám:

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) &= 2 \\ a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4 = (a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)^2-2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) &= -3 \end{aligned}$$

A konečně:

$$a^8+b^8+c^8 = (a^4+b^4+c^4)^2-2(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4) = 10$$

6.4 To se zase Matěj s Liběnkou jednou šíleně pohádali. A kvůli takové prkotině. No uznejte sami. Matěj tvrdil, že když se koule vepsaná do čtyřstěnu dotýká stěn tohoto čtyřstěnu v jejich těžištích, potom je tento čtyřstěn pravidelný. No a Liběnka si to nemyslela a šarvátka vypukla. Dokažte, že měl Matěj pravdu.

Označme čtyřstěn $ABCD$. Nechť G je těžiště trojúhelníku ABC, H těžiště trojúhelníku ACD a nechť AM je těžnice v trojúhelníku ABC a AN těžnice v trojúhelníku ACD. Potom jistě AG a AH jsou tečny ke kulové ploše vepsané do tohoto čtyřstěnu vycházející ze stejného bodu, tedy $|AG| = |AH|$. Obdobně pro tečny CG a CH platí $|CG| = |CH|$. Tedy trojúhelníky ACG a ACH jsou shodné. Pak se rovnají i úhly AGC

a AHC a také úhly AGM a AHN. Zároveň platí $|GM| = |HN|$, tedy trojúhelníky CGM a CHN jsou také shodné, takže platí $|CM| = |CN|$ a také $|BC| = |CD|$.

Analogicky se dokáže rovnost každých dvou sousedních hran ve čtyřstěnu, tedy čtyřstěn $ABCD$ je pravidelný.

6.5 Olej do ohně v této šarvátce přilila Liběnka, když Matějovi tvrdila, že pokud $3 \nmid n$, potom dokáže rozdělit úhel $\frac{\pi}{n}$ na tři stejné části pomocí pravítka a kružítka. To se zase nezdálo Matějovi. Dokažte Matějovi, že tentokrát má Liběnka pravdu.

Protože 3 a n jsou nesoudělné, musí existovat celá čísla a, b taková, že platí

$$3a + nb = 1.$$

Tuto rovnici můžeme přeskupit a vynásobit, až se dostaneme ke tvaru

$$\frac{a\pi}{n} + \frac{b\pi}{3} = \frac{\pi}{3n}.$$

Odtud nám už plyne konstrukce. Sestrojíme kružnici o libovolném poloměru, naneseme od libovolného bodu X na kružnici a-krát velikost úhlu $\frac{\pi}{n}$ a pak ještě b-krát úhel $\frac{\pi}{3}$ a skončíme v bodě Y. Již jsme dokázali, že středový úhel příslušející oblouku XY je náš hledaný úhel $\frac{\pi}{3n}$.

6.6 Matěj už to hádání se svojí sestrou nemohl vydržet a tak vyrazil na vycházku s rodinnými miláčky, psíky Tipem a Tapem. Když je nechal pobíhat po zasněžené louce, začal si z nudy malovat do sněhu nějaké obrazce. Nakreslil kružnici C, dovnitř nakreslil další dvě vzájemně se dotýkající kružnice C_1, C_2, obě o polovičním poloměru než první kružnice. Dále nakreslil kružnici C_3 dotýkající se kružnice C zevnitř a kružnic C_1, C_2 zvenčí. Nakonec nakreslil kružnici C_4, která se dotýkala C zevnitř a C_1, C_3 zvenčí.

Protože se Matěj dlouho nevracel z vycházky, začali o něho mít doma strach. I vyslali Liběnku, aby se ho vydala hledat. Když ho našla a chtěla ho odvést, Matěj ji odbyl s tím, že nepůjde dřív, než se mu podaří dokázat, že čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou středy kružnic C, C_1, C_3, C_4, je obdélník. Pomožte mu s tím.

Bez újmy na obecnosti zaveďme souřadný systém: Nechť střed kružnice C je v počátku a nechť má tato kružnice poloměr 6. Potom středy kružnic C_1 a C_2 mají souřadnice $[-3; 0]$ a $[3; 0]$. Kružnice C_3 má jistě střed na ose y, nechť je tedy jeho souřadnice $[0; a]$. Předpokládejme $a > 0$.

Protože se C_3 dotýká C_1 a C, platí

$$3^2 + a^2 = (3+r)^2 \wedge a = 6 - r \Rightarrow r = 2; a = 4.$$

Podobně, protože C_4 má dotyk s C, C_1 a C_3, musí platit následující rovnice:

$$\begin{aligned} (b-3)^2 + c^2 &= (3+s)^2 \\ b^2 + (c-4)^2 &= (2+s)^2 \\ b^2 + c^2 &= (6-s)^2 \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení $[b; c; s] = [3; 4; 1]$.

Náš čtyřúhelník má tedy vrcholy v bodech $[0; 0]; [3; 0]; [3; 4]; [0; 4]$ a je obdélníkem.

6.7 Na konferenci Lenošínských vědců se sešlo pět významných matematiků. Během této konference každý z těchto matematiků právě dvakrát usnul. Pro každou dvojici těchto matematiků nastala chvíle, kdy spali společně. Dokažte, že nastala chvíle, kdy spali alespoň tři z nich najednou.

Důkaz této úlohy povedeme sporem.

Předpokládejme, že žádní tři matematici nespali současně. Pro každou dvojici matematiků uvažujme první takový moment, kdy oba spali. Dvojic matematiků je 10, takže máme 10 takových spacích momentů. Kdyby nějaké dva spací momenty splynuly, museli by tři matematici spát současně.

Předpokládejme tedy, že se jedná o 10 různých momentů. Každý z těchto momentů zároveň musí být momentem, kdy některý z matematiků usnul. Ale v prvním takovém momentu usnuli dva matematici, takže nám na 9 spacích momentů připadá už jen 8 usnutí, což je spor.

Musel tedy nastat moment, kdy spali tři matematici současně.