Vzorové řešení 5. série XII. ročníku BRKOSu

5.1 Rodina Klevrů jezdí ráda lyžovat. Když stáli ve frontě na vlek, Matěj s Liběnkou si krátili dlouhou chvíli hádáním čísel. Matěj si myslel přirozené číslo takové, že ho nelze napsat jako součet čtvrtých mocnin tří přirozených čísel. Liběnka jeho léčku rychle prokoukla a poznala, že takových čísel existuje nekonečně mnoho. Pomůžete jí to dokázat?

Čtvrtá mocnina každého sudého přirozeného čísla je zřejmě dělitelná osmi.

Vezmeme-li liché přirozené číslo $2k+1$, k je nezáporné, pak $(2k+1)^4 = 16k^4 + 4\cdot 8k^3 + 6\cdot 4k^2 + 4\cdot 2k + 1 = 8l + 1$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$. Tedy čtvrtá mocnina lichého čísla dává zbytek 1 po dělení osmi.

Z těchto poznatků už zřejmě dostáváme, že pokud si Matěj myslí přirozené číslo dávající zbytek $4, 5, 6$ nebo 7 po dělení osmi (těch je zřejmě nekonečně mnoho), nelze jej napsat jako součet čtvrtých mocnin tří přirozených čísel.

5.2 Matěj je ve škole zlobidlo, a tak musel jednoho dne zůstat po škole. A nemohl jít domů do té doby, než spočítá následující příklad. Má dokázat, že

$$\frac{(n-m)!}{m!} \le \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-2m}$$

pro všechna přirozená čísla m, n splňující $2m \le n$. Pomůžete osvobodit Matěje?

Položme $n = 2m + r$, kde $r \in \mathbb{N}_0$. Pokud $r = 0$, dostáváme nerovnost

$$1 \le \left(\frac{m+1}{2}\right)^0 = 1,$$

což platí. Pro $r > 0$ potřebujeme dokázat

$$(m+r)(m+r-1)...(m+1) \le \left(m + \frac{r+1}{2}\right)^r.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$[(m+r)(m+r-1)...(m+1)]^{\frac{1}{r}} \le \frac{(m+r) + (m+r-1) + ... + (m+1)}{r},$$

což je A-G nerovnost pro $m+r, ..., m+1$ a tím je úloha vyřešena.

5.3 V Lenošíně se konal veletrh kuriozit. Byl tam vystaven i robot Maxík. Když mu řeknete reálné číslo x, on vám řekne největší hodnotu výrazu $|y^2 - xy|$ pro $y \in \langle 0, 1\rangle$. Jakou nejmenší reálnou hodnotu vám může Maxík říci?

$y^2 - xy = \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$, takže $y^2 - xy$ nabývá minimální hodnoty pro $y = \frac{x}{2}$. Funkce $y^2 - xy$ je klesající pro $y < \frac{x}{2}$ a rostoucí pro $y > \frac{x}{2}$. Tedy největší hodnota $|y^2 - xy|$ musí být pro $y = 0, \frac{x}{2}$ nebo 1. Hodnoty v těchto bodech jsou $0, \frac{x^2}{4}$ a $|1 - x|$. Hodnota funkce $g(x)$ bude rovna maximu z těchto tří hodnot. Pro $x \notin (0, 1)$ je zřejmě $g(x) \geq \frac{1}{4}$. Pro $x \in (0, 1)$ máme $g(x) = \max\{\frac{x^2}{4}, 1 - x\}$.

Rovnice $x^2 + 4x - 4 = 0$ má kořeny $-2 \pm \sqrt{8}$, navíc $\sqrt{8} - 2 \in (0, 1)$, takže $g(x) = 1 - x$ pro $x \in (0, \sqrt{8} - 2\rangle$ a $g(x) = \frac{x^2}{4}$ pro $x \in \langle\sqrt{8} - 2, 1)$ a minimální hodnota $g(x)$ na intervalu $(0, 1)$ je $g(\sqrt{8} - 2) = 3 - \sqrt{8} < \frac{1}{4}$.

Tím pádem nejmenší reálné číslo, které nám může Maxík říci, je $3 - \sqrt{8}$.

5.4 Když se Matěj s Liběnkou zúčastnili tohoto veletrhu (jako návštěvníci, nikoliv jako kuriozity), byla tam vyhlášena soutěž. Na zemi bylo namalováno p rovnoběžných čar a q k nim kolmých také rovnoběžných čar. A návštěvníci měli uhádnout, kolik pravoúhlých čtyřúhelníků tyto čáry vytvoří. Matěj s Liběnkou tuto soutěž samozřejmě vyhráli, dokonce tento počet určili přesně. Dokázali byste to také?

Pozn.: Hádání nemělo v soutěži naději na úspěch.

Průsečíky čar nám dají pq možných vrcholů pravoúhlých čtyřúhelníků. Vybereme libovolný vrchol, pak jiný vrchol, který není ve stejné řadě nebo sloupci jako první vrchol. Takto vybrané dva vrcholy již určují pravoúhlý čtyřúhelník.

Takových výběrů je celkem $pq(p-1)(q-1)$, avšak každý čtyřúhelník lze určit čtyřmi různými výběry. Čáry tedy vytvoří $\frac{pq(p-1)(q-1)}{4}$ pravoúhlých čtyřúhelníků.

5.5 Ani Liběnka není žádný svatoušek, a tak den poté, co byl po škole Matěj, tam zůstala nedoborovolně i ona. A čekal na ni zapeklitý úkol. Měla najít všechna přirozená čísla n taková, že množinu $\{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ můžeme rozdělit na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny tak, aby součin čísel v každé podmnožině byl stejný. Pomůžete i Liběnce?

Označme si $A = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$. Předpokládejme, že existuje nějaké n vyhovující zadání. Pokud nějaké prvočíslo dělí jeden z prvků množiny A, musí dělit i jiný prvek z A, aby mohl být součin čísel v obou podmnožinách stejný. Pro číslo větší než 5 zřejmě tato podmínka nebude splněna, v A tedy může být pouze číslo 1 a čísla dělitelná $2, 3$ a 5.

5 jistě dělí nějaké číslo z A, musí tedy dělit i jiné číslo z A, tím pádem 5 dělí n a $n + 5$ a nedělí žádné jiné číslo z A.

Mezi čísly $n + 1, n + 2, n + 3$ a $n + 4$ jsou právě dvě lichá, a pokud libovolné z těchto dvou čísel je dělitelné nějakým prvočíslem, je toto prvočíslo rovno 3. Obě tato čísla nemohou být dělitelná 3, neboť jejich rozdíl je 2.

Pak $n + 1 = 1$ a $n + 3 = 3$, ale potom $n = 0$, ale to není přirozené číslo a to je spor. Tím pádem neexistuje přirozené číslo n vyhovující zadání.

5.6 Rodina Klevrů lyžuje nejen alpsky, ale i klasicky. Klasické lyžování dokonce provozují mnohem častěji a s větším nadšením, protože je tento druh lyžování mnohem levnější a také při provozování tohoto sportu zhlédnou o dost více krásné přírody, narozdíl od lyžování alpského. Jednou se dostali dokonce až na Suchý vrch a chtěli se pokochat rozhledem z tamní rozhledny (která před nedávnem málem vyhořela), ale místo vstupného museli paní pokladní sdělit všechny uspořádané dvojice přirozených čísel $[m, n]$, které splňují rovnici

$$n^2 - 3mn + m - n = 0.$$

Pomůžete jim překonat tuto nečekanou překážku?

Předpokládejme, že přirozená čísla m, n splňují rovnici ze zadání. Pak $(3m+1)(3n-1) = 9mn-3m+3n-1 = -3(n^2-3mn+m-n)+3n^2-1 = 3n^2 - 1$, takže pokud přirozené číslo $p \mid 3n - 1$, pak musí dělit také $3n^2 - 1$, rovněž musí dělit $(3n^2 - 1) - n(3n - 1) = n - 1$ a tedy musí dělit i $(3n - 1) - 3(n - 1) = 2$. Tím pádem se $3n - 1$ může rovnat $1 \vee 2$, z toho vyhovuje zadání pouze $n = 1$, ale potom $m = 0$ (aby byla splněna rovnost v zadání), což není přirozené číslo. Stačilo tedy, aby paní pokladní sdělili, že úloha nemá řešení.

5.7 Jakmile se Klevrovi dostatečně nabažili krásného výhledu, sjeli dlouhým a nebezpečným sjezdem až k pevnosti Bouda. Chtěli si samozřejmě tuto rozsáhlou podzemní pevnost prohlédnout. U vstupu je čekala nepříjemná zpráva. Strážcům museli popsat monotónní funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující

$$f(xy)f(f(y)/x) = 1$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$. Moc rádi by se do pevnosti podívali, a tak čekají na vaši pomoc.

Volbou $x = f(y)$ dostáváme

$$f(yf(y)) \cdot f(1) = 1 \tag{1}$$

Nechť $f(1) = a$, kde $a \in \mathbb{R}^+$. Volbou $y = 1$ ve vztahu 1 máme $f(a) = \frac{1}{a}$, dosadíme-li do 1 a místo y, získáme $a^2 = 1$. Ale $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a = 1$. Tedy $f(yf(y)) = 1, f(1) = 1$.

Předpokládejme, že f nabývá hodnoty 1 pouze v bodě 1. Pak z $f(yf(y)) = 1$ plyne $yf(y) = 1$, tedy $f(y) = \frac{1}{y}$ pro všechna $y \in \mathbb{R}^+$.

Nyní předpokládejme, že existuje $1 \neq b \in \mathbb{R}^+$ tak, že $f(b) = 1$. Dosazením $y = 1$ do rovnosti v zadání máme $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$, takže $f(\frac{1}{b}) = 1$. Jedno z čísel $b, \frac{1}{b}$ je zřejmě větší než 1, BÚNO můžeme předpokládat, že $b > 1$. Položme $x = y = b$ do rovnosti v zadání. Dostaneme $f(b^2) \cdot b \frac{1}{b} = 1$ a indukcí lze snadno dokázat, že $f(b^n) = 1$ pro všechna přirozená čísla n. Platí tedy, že $f(k) = 1$ pro libovolně velké číslo k, ale také $f(1) = 1$ a f je monotónní, takže $f(x) = 1$ pro všechna $x \geq 1$. Dále $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$, takže $f(x) = 1$ pro všechna $x \in (0, 1)$.

Strážcům museli sdělit, že úloha má dvě řešení f_1 a f_2, kde $f_1(x) = \frac{1}{x}$ a $f_2(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$.