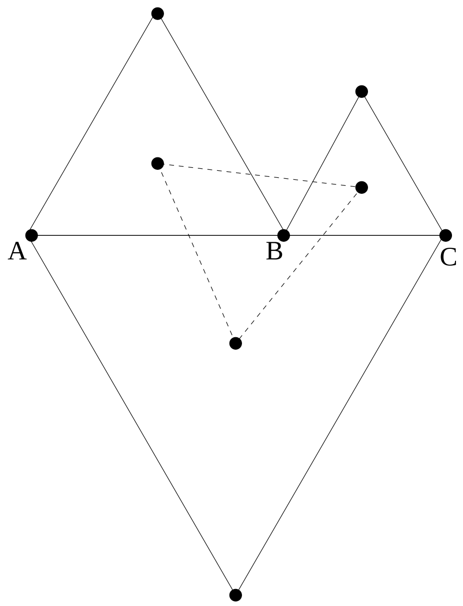
Vzorové řešení 4. série XII. ročníku BRKOSu

4.1 Před mnoha a mnoha lety bylo postaveno město Hloupětín, které mělo tři části. Všechny části byly obehnány hradbou ve tvaru rovnostranného trojúhelníka, tak jak je nakresleno na obrázku (bod B může být kdekoliv uvnitř úsečky AC). Každá z částí Hloupětína si postavila v těžišti svého území radnici. Jednoho pozorného obyvatele Hloupětína, Matěje Klevra, napadlo, že by těžiště trojúhelníka, jehož vrcholy tvořily zmiňované radnice, mohlo ležet na hranici mezi částmi Hloupětína (na úsečce AC) a že by tento trojúhelník mohl být rovnostranný. Pomůžete mu to dokázat?



Zaveďme souřadný systém s počátkem v bodě A a jednou osou na přímce AC. Dostaneme $A[0;0]; B[b;0]; C[c;0]$. Z Pythagorovy věty a z vlastností těžnic v rovnostranném trojúhelníku dokážeme vypočítat souřadnice těžišť jednotlivých trojúhelníků: $P\left[\frac{b}{2};\frac{b\sqrt{3}}{6}\right]; Q\left[\frac{b+c}{2};\frac{(c-b)\sqrt{3}}{6}\right];$ $R\left[\frac{c}{2};\frac{c\sqrt{3}}{6}\right]$.

Nyní máme souřadnice těžišť a můžeme z Pythagorovy věty spočítat délky stran trojúhelníka PQR. Postupnou aplikací získáme $|PQ| = |PR| = |QR| = \frac{\sqrt{12b^2-12bc+12c^2}}{6}$.

Chceme dokázat, že těžiště tohoto trojúhelníka leží na straně AC, takže dokazujeme, že druhá souřadnice těžiště je nula. K tomu nám stačí ukázat, že vzdálenost bodu Q od strany AC je dvojnásobná oproti vzdálenosti středu strany PR od strany AC.

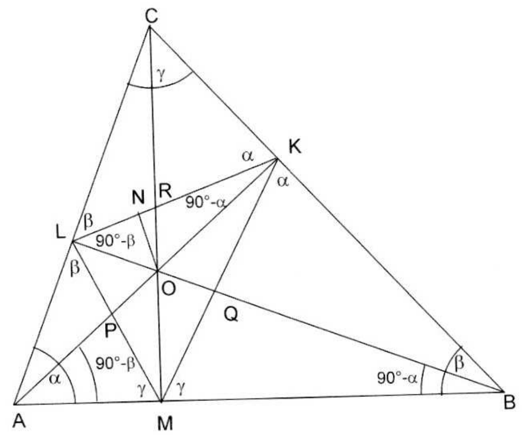
$2y_S = 2\frac{1}{2}\left(\frac{c\sqrt{3}}{6}-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(c-b)$

$y_Q = \frac{\sqrt{3}}{6}(c-b)$

Obě vzdálenosti se rovnají, těžiště tedy leží na straně AC.

4.2 Když Liběnka, Matějova sestřička, viděla, že Matěj už zase něco řeší, vrhla se k němu a snažila se mu napovídat. Matěj z toho byl čím dál nervóznější a už se schylovalo k veliké šarvátce. V poslední chvíli však zasáhl tatínek a vymyslel úlohu i pro Liběnku. Měla dané tři body K, L, M v rovině takové, že K byl patou výšky z bodu C na stranu AB, L byl patou výšky z bodu A na stranu C a bod M patou výšky z bodu B na stranu AC. Pomůžete Liběnce určit velikost stran trojúhelníka ABC v závislosti na stranách trojúhelníka KLM?

Úlohu rozdělíme do dvou částí, podle toho, o jaký trojúhelník půjde. Předpokládejme nejprve, že řešením jsou strany ostroúhlého trojúhelníka. Položím $|LM| = x, |KM| = y, |KL| = z$, strany hledaného trojúhelníka označím a, b, c.



Obsah KLM označím S, jeho obvod o, poloměr jemu vepsané kružnice r. Body O, P, Q, R označím dle obrázku, N je pata kolmice z O na KL. Úhly $\angle AKB, \angle ALB$ jsou pravé, body A, B, K, L proto leží na kružnici, čtyřúhelník $ABKL$ je tětivový, $|\angle LKB| = 180° - |\angle BAL| = 180° - \alpha$, a proto $|\angle CKL| = \alpha$. Další úhly dopočítám dle obrázku.

Uvažme obraz L' bodu L podle přímky AB. Protože je $|\angle AML'| = \gamma = |\angle BMK|$, leží body L', M, K na přímce. $\angle BL'A$ je pravý, proto body A, L', B, K leží na kružnici, platí tedy vztah

$$|AM| \cdot |BM| = |L'M| \cdot |KM| = |LM| \cdot |KM| = yz. \qquad (1)$$

Trojúhelníky ABO a KLO se shodují ve velikostech úhlů, jsou proto podobné s koeficientem podobnosti $c : z$. Vzdálenosti sobě odpovídajících bodů (tedy i vzdálenosti vrcholů od paty výšky) jsou v těchto trojúhelnících v poměru $c : z$, proto $|AM| = \frac{c|LN|}{z}, |BM| = \frac{c|KN|}{z}$, po dosazení do rce 1 dostanu vztah

$$\frac{c^2|LN|\cdot|KN|}{z^2} = xy. \tag{2}$$

Protože $|\angle LKO| = 90' - \alpha = |\angle OKM|$, leží O na ose $\angle LKM$, obdobně dokážeme, že leží i na zbylých osách vnitřních $\angle KLM$ a je proto středem kružnice vepsané trojúhelníku KLM. Bod N je proto dotykovým bodem kružnice vepsané trojúhelníku KLM.

Každý z vrcholů K, L, M má od obou přilehlých dotykových bodů stejnou vzdálenost, tyto vzdálenosti označím po řadě k, l, m. Platí

$$\begin{aligned} l + m &= x, \\ k + m &= y, \\ l + k &= z. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} k &= \frac{y+z-x}{2}, \\ l &= \frac{x+z-y}{2}, \\ m &= \frac{y+x-z}{2}. \end{aligned}$$

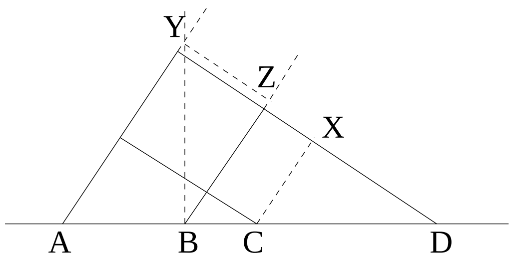
Protože $k = |KN|, l = |LN|$, můžeme dosadit do rce 2 a dostaneme vztah

$$\frac{c^2(y+z-x)(x+z-y)}{4z^2} = xy. \Rightarrow c^2 = \frac{4xyz^2}{(-x+y+z)(x-y+z)}, \tag{3}$$

zbylé strany ostroúhlého trojúhelníka vyjdou cyklickou záměnou.

Pravoúhlý trojúhelník řešením být nemůže, tupoúhlými trojúhelníky, které úlohu řeší, jsou trojúhelníky ABO, BCO, CAO. Ze známého vzorce $S = \frac{or}{2}$ odvodím $r^2 = \frac{4S^2}{o^2}$, dosazením do Pythagorovy věty pro trojúhelník LON pak $|LO|^2 = l^2 + r^2 = \frac{x-y+z}{4} + \frac{4S^2}{o^2} = \frac{(x-y+z)xz}{x+y+z}$. Z podobnosti trojúhelníků ABO a LOK plyne $|AO| = |LO| \cdot \frac{c}{z}$, tedy po umocnění a dosazení z rce 3 dostáváme $|AO|^2 = \frac{4x^2yz}{(x+y+z)(-x+y+z)}$. Zbylé spojnice vrcholů trojúhelníka ABC s bodem O vyjdou symetricky. Tedy jsme našli hledaná řešení.

4.3 V Hloupětínské olympiádě se před časem objevila následující úloha. Je dána přímka l a na ní leží čtyři různé body A, B, C, D. Dále se má sestrojit čtverec $KLMN$ takový, že přímky obsahující strany čtverce protínají přímku l v bodech A, B, C, D. Vyřešili byste tuto úlohu?



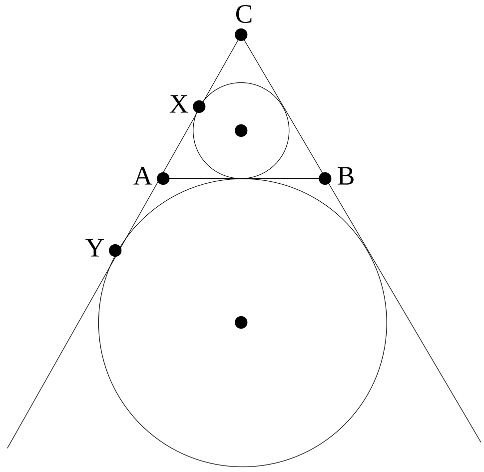
Označme bod X jako průsečík kolmice vedené z bodu C na přímku obsahující jednu ze stran čtverce s přímkou obsahující protější stranu čtverce. Bod Y je průsečík kolmice z bodu B na přímku l s přímkou obsahující bod A a jednu stranu čtverce. A bod Z značí průsečík kolmice z bodu Y na přímku obsahující bod A a jednu stranu čtverce s přímkou obsahující protější stranu čtverce. Vše, jak je znázorněno na obrázku.

Protože máme sestrojit čtverec, jistě $|CX| = |YZ|$. Dále $|\angle DXC| = |\angle BZY| = 90°$ a také jistě platí, že $\angle CDX| = |\angle AYB| = |\angle YBZ|$. Tedy trojúhelníky YBZ a CDX jsou shodné.

Nyní již můžeme přistoupit k samotné konstrukci. Nejprve sestrojme bod Y tak, že Y leží na kolmici z bodu B k přímce l a od bodu A má vzdálenost $|CD|$. Nyní již mohu narýsovat přímky obsahující dvě protilehlé strany čtverce vycházející z bodů C, D, vždyť to jsou vlastně kolmice k AY. Na přímce AY pak dostávám velikost strany čtverce a konstrukce je téměř hotová.

Nyní uvažujme o počtu řešení. Stejně tak, jak jsme uvažovali pro bod B, můžeme uvažovat i pro ostatní. Můžeme také nanést vzdálenost $|AB|$ na kolmici z bodu C a nalezený bod spojit s vrcholem D a dostaneme další řešení. Stejně ale můžeme uvažovat i pro kolmice vedené z bodu A, nejprve můžeme nanést vzdálenost $|BC|$ a spojit s D, ale také můžeme nanést $|CD|$ a spojit s B a dostaneme další dvě řešení. To samé pro vrchol D a máme další dvě řešení. Vše se dokazuje stejně jako v případě, kdyy jsme nalezli řešení pro bod B. Dohromady tedy máme 6 řešení.

4.4 Před časem přišli Hloupětínští za Harrym Klevrem, otcem Matěje, aby jim pomohl s následující úlohou. Měli narýsovat trojúhelník ABC se zadanou stranou c, poloměrem kružnice vepsané a poloměrem jiné kružnice dotýkající se přímky AC, přímky BC a strany c trojúhelníku ABC. Zvládnete to také?



Označme X, Y dotykové body kružnic s přímkou A, C tak, jak je znázorněno na obrázku, dále $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Z vlastností kružnice vepsané trojúhelníku plyne, že $|AX| = s - a$, $|AY| = s - b \Rightarrow |XY| = s - b + s - a = c$. Nyní již můžeme přistoupit k vlastní konstrukci.

Nejdříve narýsujeme úsečku XY, poté kružnice k, l dotýkající se přímky XY po řadě v bodech X, Y, s poloměry r_1, r_2, ležící v jedné polorovině. Dále sestrojíme vnitřní tečnu obou kružnic, na které najdeme body A, B. Bod C pak leží na průniku přímky X, Y a druhé vnější tečny.

4.5 Dokažte následující rovnost:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{m+n+1}{n+1},$$

$n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$.

Pozn.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}; n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; 0! = 1$.

Máme dokázat, že $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{m+n+1}{n+1}$

Využitím poznámky v zadání dostaneme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Rovnost přepíšeme: $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{m+n+1}{m}$

Důkaz této rovnosti provedeme matematickou indukcí vzhledem k i.

Pro $m = 0$ rovnice platí.

Nechť platí: $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$.

Máme dokázat, že $\sum_{i=1}^{m+1} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+2}{m+1}$. Tedy:$\sum_{i=1}^{m+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} + \binom{n+m+1}{m+1} = \binom{n+m+1}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} = \binom{n+m+2}{m+1}$ Poslední rovnost lze dokázat např. z definice binomického koeficientu. Tím je důkaz hotov.

4.6 Najděte všechny konečné podmnožiny S množiny přirozených čísel, pro které platí: $a, b \in S \Rightarrow \frac{a+b}{(a,b)} \in S$, kde (a,b) označuje největšího společného dělitele čísel a a b.

Zadání jistě vyhovuje prázdná množina. Dále tedy předpokládejme, že S má aspoň jeden prvek. Pak platí $\frac{a+a}{(a,a)} = 2 \in S$. Vidíme, že $S = \{2\}$ je další množinou vyhovující podmínce.

Ukážeme, že žádná další množina už zadání nesplňuje. Označme l největší liché číslo z S. Potom ale $\frac{l+2}{(l,2)} = l + 2 \in S$ – spor. Tudíž v S není žádné liché číslo. Nyní označme s nejmenší sudý prvek z S větší než 2. Platí $\frac{s+2}{(s,2)} = \frac{s}{2} + 1 \in S$. Protože S neobsahuje lichá čísla, je $\frac{s}{2}$ liché a $\frac{s}{2} + 1 \geq s$. Proto $s = 2$, což je spor s $s > 2$. Tedy $S = \emptyset$ a $S = \{2\}$ jsou jediné dvě podmnožiny $\mathbb{N}$ vyhovující zadání.

4.7 Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$, která jsou součtem čtverců dvou navzájem nesoudělných přirozených čísel, a přitom každé prvočíslo $p \leq \sqrt{n}$ dělí jejich součin.

Hledáme přirozená čísla a, b, n splňující $n = a^2 + b^2$, $(a,b) = 1$. Pokud $a = b = 1$, dostáváme řešení $n = 2$. Dále předpokládejme $a > b$. Platí $(a-b)^2 < a^2 + b^2 = n$, tedy každý prvočíselný dělitel $a - b$ musí dělit jedno z čísel a, b. Tím pádem však dělí obě, což je spor s $(a,b) = 1$, proto $a - b = 1$.

Dále máme $(b-1)^2 < b^2 < n$, tudíž buď je $b - 1 = 0$, nebo každý prvočíselný dělitel $b-1$ dělí $ab = b(b+1)$. Odtud snadno dostaneme, že $b = 2$ nebo je $b - 1$ mocninou dvojky. Pokud $b - 1 \geq 4$, tak $b - 2 > 1$ a přitom $(b-2)^2 < n$, tedy každý prvočíselný dělitel lichého čísla $b-2$ dělí $b(b+1)$, z čehož lehce dostaneme, že $b - 2$ je mocnina trojky. Snadno lze ověřit, že tím pádem je $b - 2 \equiv 1$ nebo $b - 2 \equiv 3 \pmod 8$, proto $b - 1$ nemůže být dělitelné osmi. Máme tedy $b \in \{1, 2, 3, 5\}$.

Ověřením těchto možnosti získáme další dvě řešení, $n = 5$ a $n = 13$.