# Vzorové řešení 3. série XII. ročníku BRKOSu

**3.1** Polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty nabývá hodnoty $5$ pro pět různých celých čísel $x$.

Ukažte, že $P(y) \neq 9$ pro všechna celá čísla $y$.

Je zřejmé, že $P(x)$ lze vyjádřit ve tvaru $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)Q(x) + 5$ pro jistá, po dvou různá $a, b, c, d, e$. Pokud $x$ je rovno nějakému z těchto čísel, je $P(x) = 5$.

Nechť $x$ je celé číslo různé od $a, b, c, d, e$. Pokud $Q(x) = 0$, pak $P(x) = 5$. Pokud $Q(x) \neq 0$, pak $|Q(x)| \geq 1$.

Nejvýše dva z výrazů $|x-a|, |x-b|, |x-c|, |x-d|, |x-e|$ mohou být rovny 1 a nejvýše dva mohou být rovny 2. Jejich součin je tedy určitě větší než 4. Nutná podmínka k tomu, aby platilo $P(x) = 9$, je $|(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)| \leq 4$, ale před chvílí bylo ukázáno, že tento součin je větší než 4.

Zjistili jsme tedy, že $P(x) \neq 9$ pro všechna $x \in \mathbb{Z}$.

**3.2** Najdětě racionální číslo $x \in (3; 4)$ takové, že $\sqrt{x-3}$ i $\sqrt{x+1}$ jsou racionální.

Nechť $x = 3 + a^2$. Pak potřebujeme, aby $a^2 + 4 = b^2$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$. Poslední rovnost je ekvivalentní s rovností $4 = (b+a)(b-a)$. Nechť $c = b - a$. Pak $b + a = \frac{4}{c} \Rightarrow a = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{2}{c} - \frac{c}{2}$. Aby $x$ vyhovovalo zadání, musí být $0 < a < 1$, takže musíme zvolit takové $c$, aby platilo $0 < \frac{2}{c} - \frac{c}{2} < 1$. Zvolme například $c = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 3 + \frac{25}{36} = \frac{133}{36}$. Zřejmě je $\sqrt{x-1} = a = \frac{5}{6}$ a $\sqrt{x+3} = \frac{13}{6}$, takže $x = \frac{133}{36}$ vyhovuje zadání.

**3.3** Víme, že existuje bod uvnitř rovnostranného trojúhelníku o straně $d$, jehož vzdálenosti od vrcholů tohoto trojúhelníka jsou $3, 4$ a $5$. Určete vzdálenost $d$.

Nechť $ABC$ je daný trojúhelník a označme $P$ bod s danými vlastnostmi. BÚNO můžeme předpokládat, že $PA = 3, PB = 4, PC = 5$. Provedeme rotaci trojúhelníka a bodu $P$ o $60°$ se středem rotace v bodě $C$ tak, aby bod $B$ přešel do bodu $A$. Nechť obrazem bodu $A$ je bod $A'$ a obrazem bodu $P$ bod $P'$. Pak $CP = CP'$ a $\angle PCP' = 60°$, takže trojúhelník $PCP'$ je rovnostranný se stranou délky 5. Trojúhelník $PAP'$ má tedy strany $3, 4, 5 \Rightarrow \angle PAP' = 90° \Rightarrow \angle PAB + \angle P'AA' = 30° \Rightarrow \angle APB = 150°$.

Použitím kosinové věty v trojúhelníku $PAB$ dostaneme $d^2 = 3^2 + 4^2 - 24\cos 150° \Rightarrow d = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

**3.4** Ukažte, že $n$ dělí $2^n + 1$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel $n$.

Pro $n = 3$ máme $2^n + 1 = 9$, což je násobek 3. Dále nechť $h, k \in \mathbb{N}$. Platí $2^{3k} + 1 = (2^k + 1)(2^{2k} - 2^k + 1)$, takže pokud $2^k + 1 \equiv 0 \pmod 3$, pak $2^{2k} \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2^{2k} - 2^k + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Jestliže $3^h$ dělí $2^k + 1$, pak podle výše uvedených poznatků $3^{h+1}$ dělí $2^{3k} + 1$. Dostáváme tedy podle matematické indukce, že pro nekonečně mnoho čísel $n = 3^k, k \in \mathbb{N}$ platí $n \mid (2^n + 1)$.

**3.5** Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\geq 0 \\
2x_2 - 5x_3 + 3x_4 &\geq 0 \\
&\vdots \\
2x_{23} - 5x_{24} + 3x_{25} &\geq 0 \\
2x_{24} - 5x_{25} + 3x_1 &\geq 0 \\
2x_{25} - 5x_1 + 3x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

v oboru reálných čísel.

BÚNO můžeme předpokládat, že $x_1 \geq x_i$ pro $i \in 1, 2, \ldots, 25$. Z poslední nerovnice pak máme $x_{25} = x_2 = x_1$, takže $x_2 \geq x_i$ pro $i \in 1, 2, \ldots, 25$. Z první nerovnice máme $x_2 = x_3$. Analogicky můžeme postupovat v dalších nerovnicích, takže nakonec zjistíme, že se všechna $x_i$ sobě rovnají. Řešením soustavy jsou tedy uspořádané 25-tice $[a, a, \ldots, a], a \in \mathbb{R}$.

**3.6** Najděte všechny uspořádané trojice přirozených čísel $[a, b, c]$ takové, že $a < b \wedge a < 4c \wedge bc^3 \leq ac^3 + b$.

Položme $b = a + x$, kde $x \geq 1$. Pak $xc^3 \leq a + x$. Platí $c > \frac{a}{4} \Rightarrow a \geq x(c^3 - 1) \geq c^3 - 1 > \frac{a^3}{64} - 1$, takže $a \leq 8$.

Nyní rozebereme několik případů pro různé hodnoty $a$.

$a = 8$**:** Z nerovnosti $4c > a$ plyne $c \geq 3 \Rightarrow a < (c^3 - 1)$ a to je spor.

$a = 7$**:** Z $a \geq x(c^3 - 1)$ máme $c = 1 \vee c = 2$. Nerovnosti $a < 4c$ vyhovuje pouze $c = 2$, takže $x = 1 \Rightarrow b = 8$.

$a \in \{4,5,6\}$**:** Zřejmě $c \geq 2$, takže $c^3 - 1 > a$, což je spor.

$a \in \{1,2,3\}$**:** Musí platit $a > x(c^3-1)$, což může být zřejmě splněno pouze pro $c = 1$. V tomto případě je nerovnice splněna pro libovolné $x$.

Řešením úlohy jsou tedy uspořádané trojice
$[a,b,c] \in \{[7,8,2],[1,k,1],[2,k,1],[3,k,1]\}, k > a$.

**3.7** Nechť funkce $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňuje následující podmínky:

1. $f(a+b) = f(f(a)+b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}_0$,
2. $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pro $a + b < 10; a, b \in \mathbb{N}_0$,
3. $f(10) = 1$.

Nechť $m = 2^{3^{4^5}}$. Určete, kolik trojciferných čísel $n$ splňuje $f(n) = f(m)$.

$f(1+0) = f(1) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. $f(10+0) = f(f(10)+0) \Rightarrow 1 = f(f(10)) = f(1)$. $f(a+b) = f(a)+f(b)$ pro $a+b < 10 \Rightarrow f(2) = 2, f(3) = 3, \ldots, f(9) = 9$.

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ máme $f(10+k) = f(f(10)+k) = f(1+k) \Rightarrow f(9+l) = f(l)$ pro všechna $l \in \mathbb{N}$. Z uvedených poznatků získáváme, že $f(n) \equiv n \pmod 9$.

Dále si můžeme snadno ověřit, že $2^k \equiv 1,2,4,8,7,5 \pmod 9$ pro $k \equiv 0,1,2,3,4,5 \pmod 6$. Zřejmě $3 \mid 3^{4^5} \wedge 6 \nmid 3^{4^5} \Rightarrow 3^{4^5} \equiv 3 \pmod 6 \Rightarrow m = 2^{3^{4^5}} \equiv 8 \pmod 9 \Rightarrow f(m) = 8$.

Musíme tedy zjistit, kolik trojciferných čísel má zbytek 8 po dělení 9. Nejmenší z nich je $107 = 9 \cdot 11 + 8$, největší $998 = 9 \cdot 110 + 8$. Zadanou rovnost tedy splňuje 100 čísel.