Vzorové řešení 2. série XII. ročníku BRKOSu

2.1 V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y.$$

Rovnici upravíme na tvar:

$$(x^2 - 2x - 1)y = x^2 + 2x - 1$$

Kvadratická rovnice $x^2 - 2x - 1$ má kořeny $1 + \sqrt{2}$ a $1 - \sqrt{2}$, proto v oboru celých čísel nemůže být rovna nule. Tedy

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x - 1} = 1 + \frac{4x}{x^2 - 2x - 1}.$$

Zlomek $\frac{4x}{x^2-2x-1}$ musí být celé číslo, proto platí $x^2 - 2x - 1 \mid 4x$. To může nastat tehdy, pokud $x = 0$ nebo $|x^2 - 2x - 1| \leq |4x|$. Je-li $x = 0$, dostáváme řešení zadané rovnice $[x, y] = [0, 1]$.

Nyní řesme nerovnost $|x^2 - 2x - 1| \leq |4x|$. Pro $x > 1 + \sqrt{2}$ máme

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &\leq 4x \\ x^2 - 6x - 1 &\leq 0 \\ x &\in \langle 3 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10} \rangle \\ x &\in \{3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

Dosazením do zadané rovnice zjistíme, že jediné vyhovující řešení je $[x, y] = [3, 7]$.

Dále se podíváme na x splňující $0 < x < 1 + \sqrt{2}$. Zde máme dvě možné hodnoty, a to $x = 1$ a $x = 2$. Dosazením do rovnice ze zadání získáme řešení $[x, y] = [1, -1]$ a $[x, y] = [2, -7]$.

Jistě neexistuje celé x takové, že $1 - \sqrt{2} < x < 0$.

Pro $x < 1 - \sqrt{2}$ platí

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &\leq -4x \\ x^2 + 2x - 1 &\leq 0 \\ x &\in \langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle \\ x &\in \{-2, -1\} \end{aligned}$$

Dosazením do rovnicí ze zadání zjistíme, že vyhovuje pouze $[x, y] = [-1, -1]$.

Tedy řešením rovnice jsou $[x, y] \in \{[-1, 1], [0, 1], [1, -1], [2, -7], [3, 7]\}$.

2.2 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^3+3xy^2+3xz^2-6xyz &= 1\\ y^3+3yz^2+3x^2y-6xyz &= 1\\ z^3+3x^2z+3y^2z-6xyz &= 1. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$\begin{aligned} (x^3+3xy^2+3xz^2-6xyz)-(y^3+3yz^2+3yx^2-6xyz) &= 0\\ (x-y)[(x-y)^2+3z^2] &= 0 \end{aligned}$$

Kdyby x bylo různé od y, byla by první závorka nenulová, druhá větší než nula a tím pádem by rovnost neplatila, proto $x=y$.

Obdobně odečtením třetí rovnice od první dostaneme $x=z$. Dosazením do libovolné rovnice ze zadání za y a z získáváme

$$\begin{aligned} x^3+3x^3+3x^3-6x^3 &= 1\\ x^3 &= 1\\ x &= 1 \end{aligned}$$

Proto jediným řešením soustavy je $[x,y,z]=[1,1,1]$.

2.3 Najděte všechna přirozená čísla $n>1$ taková, že každý prvočíselný dělitel čísla n^6-1 je i dělitelem čísla $n^5-n^3-n^2+1$.

Máme:

$$\begin{aligned} n^6-1 &= (n-1)(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)\\ n^5-n^3-n+1 &= (n-1)^2(n+1)(n^2+n+1) \end{aligned}$$

Dělí-li prvočíslo p některý z prvních tří činitelů, na jejichž součin jsme n^6-1 rozložili, jistě dělí i n^5-n^3-n+1.

Ze zadání $n>1$, tudíž $n^2-n+1>1$, a tedy existuje prvočíslo p dělící tento výraz, které tím pádem musí dělit jedno z čísel $n-1$, $n+1$, n^2+n+1. Proto pro prvočíslo p máme tři následující možnosti, které rozebereme:

1. $p \mid n^2-n+1 \wedge p \mid n-1 \Rightarrow p \mid n^2-n+1-(n-1)^2=n$

Tedy $p \mid n-1$ a $p \mid n$, což jsou dvě nesoudělná čísla a tudíž dostáváme spor.
2. $p \mid n^2-n+1 \wedge p \mid n+1 \Rightarrow p \mid (n+1)^2-(n^2-n+1)=3n$

Protože $p \mid n+1$ a $p \mid 3n$ a přitom $n+1$ a n jsou nesoudělná, dostáváme $p|3$, a proto jediným možným prvočíslem je $p=3$. Z $3|n+1$ víme, že $n \equiv 2 \pmod 3$, a tak existují tři možnosti, jaký může číslo n dávat zbytek po dělení 9:

$$\begin{aligned} n \equiv 2 \pmod 9 &\Rightarrow n^2-n+1 \equiv 3 \pmod 9 \\ n \equiv 5 \pmod 9 &\Rightarrow n^2-n+1 \equiv 3 \pmod 9 \\ n \equiv 8 \pmod 9 &\Rightarrow n^2-n+1 \equiv 3 \pmod 9 \end{aligned}$$

Vidíme, že číslo n^2-n+1 nemůže být dělitelné žádnou vyšší mocninou 3 než první. Pokud by $n^2-n+1=3$, je $n=2$ a tím pádem $n+1=3$, tedy číslo 2 spňuje zadání.
3. $p \mid n^2-n+1 \wedge p \mid n^2+n+1 \Rightarrow p \mid n^2+n+1-(n^2-n+1)=2n$

Platí $p \mid n^2-n+1$ a $p \mid 2n$. Čísla n a n^2-n+1 jsou zřejmě nesoudělná a číslo $n^2-n+1=n(n-1)+1$ je liché, proto n^2-n+1 a $2n$ jsou nesoudělná, čímž dostáváme spor.

Víme tedy, že n^2-n+1 může být dělitelné pouze prvočíslem 3 v první mocnině, proto $n=2$ je jediným přirozeným číslem vyhovujícím zadání.

2.4 Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a^3-b^3-c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(a+b+c), \end{aligned}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Z první rovnosti máme $a > b$ a také $a > c$. Po dosazení do druhé dostáváme $a^2 < 6a$ a tedy $a < 6$. Z druhé rovnosti rovněž plyne, že a je sudé, tedy $a=2$ nebo $a=4$. Pokud $a=2$, pak $b=c=1$, ale tyto hodnoty nevyhovují v druhé rovnici. Pokud $a=4$, dostáváme $b+c=4$ a snadno si můžeme ověřit, že $(b,c)=(3,1),(b,c)=(2,2)$ a $(b,c)=(1,3)$ splňují zadané rovnosti. Všechna řešení soustavy rovnic jsou tedy $(a,b,c)=(4,1,3),(4,2,2),(4,3,1)$.

2.5 Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále platí, že n a $3n$ mají stejný ciferný součet. Dokažte, že $9 \mid n$.

Označme $S(x)$ ciferný součet čísla x. Zřejmě $3|3n \Rightarrow 3|S(3n) \Rightarrow 3|S(n) \Rightarrow 3|n \Rightarrow 9|3n \Rightarrow 9|S(3n) \Rightarrow 9|S(n) \Rightarrow 9|n$ a tím je důkaz hotov.

2.6 Železnice prochází 11 stanicemi $A, B, \ldots, K$ (v tomto pořadí). Vzdálenost mezi A a K je 56, vzdálenosti $AC, BD, \ldots, IK$ jsou všechny ≤ 12 a vzdálenosti $AD, BE, \ldots, HK$ jsou všechny ≥ 17.

Určete vzdálenost mezi stanicemi B a G.

Ze zadání snadno dostaneme $BK = BE + EH + HK \geq 51$, dále víme, že $AK = 56$, a tedy $AB \leq 5$. $AD = AB + BD \leq 5 + 12 = 17$, ale zároveň $AD \geq 17 \Rightarrow AD = 17, AB = 5, BD = 12$.

Dále platí $51 = 56 - 5 = AK - AB = BK = BE + EH + HK \geq 17 + 17 + 17 = 51$, takže ve všech použitých nerovnostech musí nastat rovnost, tedy $BE = EH = HK = 17$.

Již víme, že $BD = 12$ a $BE = 17 \Rightarrow DE = 5$. Zjistili jsme, že $AB = 5, BD = 12$ a $DE = 5$, ze symetrie rovněž můžeme konstatovat, že $JK = 5, HJ = 12$ a $GH = 5$ a tedy $GK = 22$.

Zřejmě $BG = AK - AB - GK = 56 - 5 - 22 = 29$ a úloha je vyřešena.

2.7 V trojúhelníku ABC jsou těžnice vedené z vrcholů B a C na sebe kolmé. Označme β, resp. γ úhel při vrcholu B, resp. C.

Ukažte, že

$$\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \geq \frac{2}{3}.$$

Nechť BD a CE jsou těžnice a nechť se protínají v bodě P. Položme $PD = x$ a $PE = y \Rightarrow BP = 2x$ a $CP = 2y$. Pak $\operatorname{tg} PBE = \frac{y}{2x}, \operatorname{tg} PBC = \frac{y}{x}$, takže $\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{y}{2x}+\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{2x^2}} = \frac{3xy}{2x^2-y^2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\beta = \frac{2x^2-y^2}{3xy}$. Analogicky dostaneme $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{2y^2-x^2}{3xy} \Rightarrow \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{x^2+y^2}{3xy} \geq \frac{2}{3}$ (podle A-G nerovnosti pro x^2, y^2).