# Vzorové řešení 1. série XII. ročníku BRKOSu

**1.1** Nechť $ABC$ je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem $A$ a úhlem $|\angle BAC| = 100°$. Osa úhlu $ABC$ protíná $AC$ v bodě $D$.

Dokažte, že $BD + AD = BC$.

Označme $X$ a $Y$ body na straně $BC$ takové, že $|BX| = |BD|$ a $|BY| = |AB|$. Trojúhelníky $ABD$ a $DBY$ jsou shodné podle věty sus ($|BY| = |AB|, |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle DBY| = |\sphericalangle ABC|/2, BD$ společná), proto $|DY| = |AD|$ a $|\sphericalangle BYD| = |\sphericalangle BAD| = 100°$.

Trojúhelník $ABC$ je rovnoramenný, tedy $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = (180° - |\sphericalangle BAC|)/2 = 40°$. Dále $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle DBX| = 20°$, neboť $BD$ je osa $\sphericalangle ABC$.

Z rovnoramennosti $\triangle\ DBX$ máme $|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle BDX| = (180° - |\sphericalangle DBX|)/2 = 80°$. Dostáváme $|\sphericalangle XYD| = 180° - |\sphericalangle BYD| = 80° = |\sphericalangle BXD|$ a odtud $|DY| = |DX|$.

Obdobně $|\sphericalangle XDC| = 180° - (|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ADX|) = 40° = |\sphericalangle BCD|$, z čehož plyne $|XC| = |DX|$.

Tedy $|XC| = |DX| = |DY| = |AD|$, a tak $|BC| = |BX| + |XC| = |BD| + |AD|$.

**1.2** Je dána kružnice nad průměrem $AB$ a na úsečce $AB$ pevný bod $X$.

Dokažte, že pro každý bod $P$ kružnice různý od $A, B$ je $\frac{\tan \angle APX}{\tan \angle PAX}$ je konstantní.

Označme $Y$ bod úsečky $PX$ takový, že $|\sphericalangle PAY| = 90°$. Dále $|\sphericalangle APB| = 90°$, neboť $P$ leží na Thaletově kružnici nad $AB$.

Pak $\tan\sphericalangle PAX = \frac{|PB|}{|PA|}$ a $\tan\sphericalangle APX = \frac{|AY|}{|PA|}$, tedy $\frac{\tan\sphericalangle APX}{\tan\sphericalangle PAX} = \frac{|AY|}{|PB|}$. Platí $|\sphericalangle YAX| = |\sphericalangle XBP|$, protože přímky $PB$ a $AY$ jsou rovnoběžné a úhly $YAX$ a $XBP$ střídavé. Podle věty uu ($|\sphericalangle AXY| = |\sphericalangle PXB|$ - souhlasné úhly, $|\sphericalangle YAX| = |\sphericalangle XBP|$) jsou trojúhelníky $AXY$ a $BXP$ podobné, a tak $\frac{|AY|}{|PB|} = \frac{|AX|}{|BX|}$.

Body $A$, $B$ a $X$ jsou pevně dané, proto $\frac{\tan\sphericalangle APX}{\tan\sphericalangle PAX} = \frac{|AX|}{|BX|}$ je konstantní.

**1.3** Na kružnici je rozmístěno $51$ přirozených čísel, jejichž součet je $150$.

Dokažte, že na kružnici existuje řada čísel, jejichž součet je $100$.

Označme čísla na kružnici po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$. Uvažujme součty $s_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Máme rostoucí posloupnost $51$ čísel $\{s_i\}$, tedy tato posloupnost obsahuje 2 členy, které dávají po dělení $50$ stejný zbytek.

Označme je $s_k$ a $s_l$, $k < l$. Protože $50 \mid s_l - s_k$ a $0 < s_l - s_k < 150$, $s_l - s_k \in \{50, 100\}$.

Je-li $s_l - s_k = 100$, má součet 100 řada čísel $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, v opačném případě má součet 100 řada čísel $a_{l+1}, \ldots, a_{51}, a_1, \ldots, a_k$.

**1.4** Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sudých přirozených čísel $k$ takových, že pro každé prvočíslo $p$ je číslo $p^2 + k$ složené.

Nechť $p \neq 3$. Pak $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Je-li tedy $k \equiv 2 \pmod 3$, $3 \mid p^2 + k$. Zřejmě $p^2 + k > 3$, je to tedy číslo složené.

Nechť $p = 3$. $5 \mid 3^2 + k \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod 5$. $3^2 + k > 5$, tedy pro $k \equiv 1 \pmod 5$ je $3^2 + k$ složené.

Tedy pro všechna sudá $k$, která dávají po dělení 3 zbytek 2 a po dělení 5 zbytek 1, je číslo $p^2 + k$ vždy složené. Těchto čísel je zřejmě nekonečně mnoho (konkrétně jsou to čísla tvaru $30l + 26$, $l \in \mathbb{N}_0$).

**1.5** Nechť $a, b, c$ jsou strany trojúhelníka s obvodem 1.

Dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}.$$

Nechť $A, B, C$ jsou vrcholy daného trojúhelníku se stranami $BC = a, CA = b, AB = c$. Tomuto trojúhelníku lze jistě vepsat kružnici, která se dotýká stran $a, b, c$ po řadě v bodech $P, Q, R$. Přímky $BP$ i $BR$ jsou tečny vedené z bodu $B$ ke stejné kružnici a $P, R$ jsou body dotyku, proto $|BP| = |BR| = x$. Analogicky $|CP| = |CQ| = y$ a $|AQ| = |AR| = z$ a navíc $x, y, z$ jsou zřejmě kladná reálná čísla.

Zřejmě $a = x+y, b = y+z, c = z+x \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$. Pak $a^2+b^2+c^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx < 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 4zx = 2(x+y+z)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ a tím je zadaná nerovnost dokázána.

**1.6** Existuje nekonečná množina přirozených čísel taková, že součet libovolných dvou jejich prvků je dělitelný jejich rozdílem?

Předpokládejme, že $M \subseteq \mathbb{N}$ splňuje zadání. Označme $n$ nejmenší přirozené číslo v $M$. Pak pro všechna $x \in M$ platí $x - n \mid x + n$, a protože $n > 0$, je $x - n \neq x + n$, a tak $2(x - n) \leq x + n$.

Úpravou dostaneme $x \leq 3n$, tedy množina M je shora omezená a tudíž konečná, čímž dostáváme spor.

**1.7** Jestliže $n$ je přirozené číslo větší než $1$ a $a$ přirozené číslo nedělitelné osmi, pak $a^n + a + 1$ není čtvercem žádného přirozeného čísla.

Dokažte.

Nechť $n$ je sudé, tedy $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Pak $(a^m)^2 = a^{2m} < a^{2m}+a+1 < a^{2m} + 2a^m + 1 = (a^m + 1)^2$. Tedy $a^n + a + 1$ leží mezi čtverci dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, a tak nemůže být čtvercem přirozeného čísla.

Nechť $n$ je liché, tedy $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $a^n + a + 1 = l^2$, $l \in \mathbb{N}$. Pro $l$ dávající po dělení 8 lichý zbytek je $a^n + a + 1 \equiv 1 \pmod 8$, pro $l$ dávající zbytek dělitelný 4 je $a^n + a + 1 \equiv 0 \pmod 8$ a pro $l$ dávající zbytek 2 nebo 6 je $a^n + a + 1 \equiv 4 \pmod 8$. Obdobně číslo $a^{2m}$ musí po dělení osmi dávat zbytek 0, 1 nebo 4.

Číslo $a^{2m+1} + a + 1$ je liché, musí tedy platit $8 \mid a(a^{2m} + 1)$. Protože $a$ a $a^{2m} + 1$ jsou nesoudělná, musí platit buď $8 \mid a$, nebo $8 \mid a^{2m} + 1$, čímž dostáváme spor se zadáním a tím, že zbytek $a^{2m}$ může být jen 0, 1 nebo 4.

Tedy ani pro liché $n$ není $a^n + n + 1$ čtvercem přirozeného čísla.