Vzorové řešení 6. série XI. ročníku BRKOSu

6.1 Najděte nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: pokud první cifru čísla n přesuneme na jeho konec, dostaneme $\frac{7n}{2}$.

Čísla $n < 10$ zřejmě nevyhovují zadání. Položme $n = a \cdot 10^m + b$, kde $1 \leq a \leq 9$, $m \in \mathbb{N}$ a $0 \leq b < 10^m$. Pak $\frac{7n}{2} = 10b + a$. Z těchto dvou rovností získáme

$$13b = a(7 \cdot 10^m - 2).$$

Je zřejmé, že 13 nemůže dělit a, takže musí dělit $7 \cdot 10^m - 2$. Postupným dosazováním za m zjistíme, že nejmenší možné m je rovno 5. Nejmenší možné a je 1, pak je $b = 53846$.

Řešením této úlohy je tedy $n = 153846$.

6.2 Nechť

$$n = 11 \ldots 122 \ldots 25,$$

kde počet jedniček v čísle n je x a počet dvojek $x + 1$, x je nezáporné celé číslo.

Dokažte, že pak n je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Položme $k = 33 \ldots 35$ (počet trojek je x). Pak

$$k = \frac{10^{x+1} - 1}{3} + 2.$$

$$k^2 = \frac{10^{2x+2} - 2 \cdot 10^{x+1} + 1}{9} + \frac{4 \cdot (10^{x+1} - 1)}{3} + 4 =$$
$$= \frac{1}{9} \cdot 10^{2x+2} + \left(-\frac{2}{9} + \frac{12}{9}\right) 10^{x+1} + \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 4\right) =$$
$$= \frac{10^{2x+2} - 1}{9} + \frac{10^{x+2} - 1}{9} + 3 = 1 \ldots 12 \ldots 25.$$

V tomto čísle je tedy $2x + 2 - x - 2 = x$ jedniček a $x + 2 - 1 = x + 1$ dvojek.

Vyšlo nám tedy, že $n = k^2$, čímž je úloha vyřešena.

6.3 Přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ splňují následující rovnost:

$$\sum_{i=1}^{14} 3^{a_i} = 6558.$$

Dokažte, že se mezi těmito čísly vyskytují právě dvakrát čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Nejdříve si dokážeme pomocné lemma.

Lemma: Nechť libovolné přirozené číslo n, které je zapsáno v trojkové soustavě, má ciferný součet k. Pak vyjádření čísla n jako součet k mocnin trojky je jediné (toto vyjádření získáme ze zápisu n v trojkové soustavě).

Důkaz: Důkaz bude proveden matematickou indukcí vzhledem k n.

1. Pro $n = 1$ zřejmě platí.
2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla menší než n. Nechť vyjádření n v trojkové soustavě je
$$n = \sum a_i 3^{b_i},$$
kde $b_1 > b_2 > \dots$, $\forall a_i : a_i = 1 \vee a_i = 2 \wedge \sum a_i = k$. Nechť také $n = \sum 3^{c_j}$, přičemž v tomto součtu je k sčítanců. Nechť dále b je nejmenší b_i a c nejmenší c_j. Potom 3^b je největší mocnina 3 dělící n, ale také 3^c je největší mocnina 3 dělící n, takže $b = c$. Nyní můžeme použít indukční předpoklad pro číslo $n - 3^b$, tvrzení je tedy splněno i pro n a tím je důkaz hotov.

Tvrzení v úloze plyne přímo z lemmatu a z toho, že 6558 je v trojkové soustavě rovno 22222220.

6.4 Najděte všechna přirozená čísla m, n taková, že všechny kořeny rovnice $(x^2 - mx + + n)(x^2 - nx + m) = 0$ jsou přirozené.

Nechť kořeny polynomu $x^2 - mx + n$ jsou a, b a kořeny $x^2 - nx + m$ c, d. Pak podle Vietových vztahů platí $m = a + b = cd \wedge n = c + d = ab$. Z toho plyne, že $(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2$. $a-1, b-1, c-1$ a $d-1$ jsou celá nezáporná čísla, může tedy nastat jeden ze tří případů:

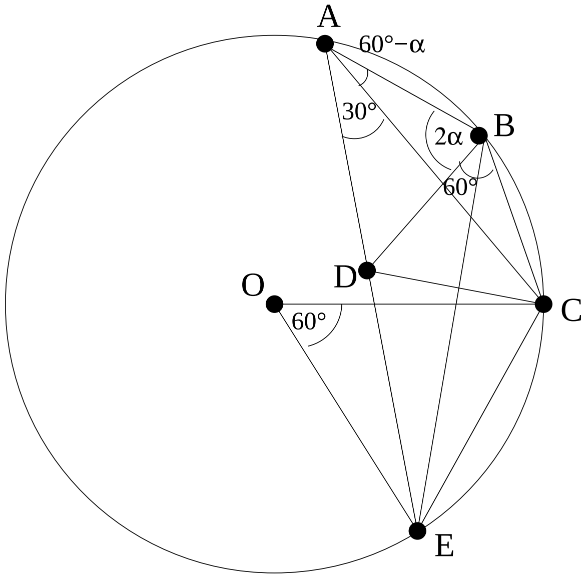
1. $(a-1)(b-1) = 0 \wedge (c-1)(d-1) = 2 \Rightarrow [c; d] = [2; 3] \vee [c; d] = [3; 2]$. Odtud vyplývá, že $[m; n] = [6; 5]$.
2. $(a-1)(b-1) = 2 \wedge (c-1)(d-1) = 0$. Tento případ je analogický prvnímu případu. Odtud vyplývá $[m; n] = [5; 6]$.
3. $(a-1)(b-1) = (c-1)(d-1) = 1 \Rightarrow a = b = c = d = 2$. Odtud je $[m; n] = [4; 4]$.

Všechny dvojice $[m; n]$ vyhovující zadání jsou tedy $[4; 4], [5; 6], [6; 5]$.

6.5 Mějme kružnici k a na ní dva body B, C takové, že bod D, který je vrcholem rovnostranného trojúhelníka BCD, leží uvnitř kružnice k. Dále mějme bod $A \in k$ takový, že $|AB| = |BC| \wedge A \neq C$.

Nechť přímka AD protíná kružnici k v bodě $E \neq A$.

Dokažte, že $|DE| = r$, kde r je poloměr kružnice k.



Nechť O je střed kružnice k. Položme $|\angle DBA| = 2\alpha$. Pak $|\angle CBA| = 60° + 2\alpha$. Protože trojúhelník BCA je rovnoramenný s rameny AB, AC, dostáváme $|\angle BAC| = = \frac{180° - |\angle CBA|}{2} = 90° - 30° - \alpha = = 60° - \alpha$. Rovněž trojúhelník BDA je rovnoramenný (s rameny BA, BD), platí tedy $|\angle BAD| = \frac{180° - |\angle DBA|}{2} = 90° - \alpha$.
$|\angle EAC| = |\angle BAD| - |\angle BAC| = = 90° - \alpha - 60° + \alpha = 30°$.
Úhly EAC, EBC jsou obvodové úhly příslušné témuž oblouku $EC \Rightarrow |\angle EBC| = = |\angle EAC| = 30°$, EB je tedy osa úhlu CBD. Protože trojúhelník BCD je rovnostranný, je EB rovněž osou strany $CD \Rightarrow \Rightarrow |ED| = |EC|$.

Úhel EOC je středový úhel příslušný oblouku $EC \Rightarrow |\angle EOC| = 2|\angle EBC| = 60°$. Dále $|\angle OEC| = |\angle OCE| = \frac{180° - |\angle EOC|}{2} = 60°$, neboť OCE je rovnoramenný trojúhelník s rameny OE, OC. Trojúhelník OCE je tedy rovnostranný, a tedy $|EC| = |OC| = r$. Již víme, že $|DE| = |EC| \Rightarrow |DE| = r$ a tím je úloha vyřešena.

6.6 Nechť $a > b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dokažte, že pak

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Platí $a > b \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a} < 1 < \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}$.

Vynásobením všech tří členů v nerovnostech kladným číslem $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ dostáváme požadovaný výsledek.

6.7 Víme, že soustava rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= 1 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\
-x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\
-x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1 \\
&\vdots \\
-x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 1 \\
-x_{n-1} + 2x_n &= 1
\end{aligned}$$

má řešení v oboru přirozených čísel.

Dokažte, že pak n musí být sudé.

Sečtením prvních $k-1$ rovnic ($k = 2, 3, \ldots, n$) dostáváme

$$x_1 + x_{k-1} - x_k = k - 1.$$

Sečtením těchto rovnic pro $k = 2, 3, \ldots l$ dostáváme rovnici

$$lx_1 - x_l = 1 + 2 + \ldots + l - 1 = \frac{(l-1)l}{2} \Rightarrow x_l = lx_1 - \frac{(l-1)l}{2}.$$

Speciálně pro $l = n - 1$ a $l = n$ máme

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= (n-1)x_1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
x_n &= nx_1 - \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice v zadání máme

$$-(n-1)x_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2nx_1 - n(n-1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)x_1 = \frac{2 + 2n(n-1) - (n-1)(n-2)}{2} = \frac{2 + 2n^2 - 2n - n^2 + 3n - 2}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{n}{2}.$$

Protože x_1 musí být podle zadání přirozené, musí být n sudé, což jsme chtěli dokázat.