Vzorové řešení 5. série XI. ročníku BRKOSu

5.1 Myslím si trojciferné číslo, jehož první a poslední číslice se liší. Nyní si toto číslo napíšu pozpátku. Odečtu menší číslo od většího. Dostanu opět trojciferné číslo. Pokud ne, doplním si na místo stovek cifru 0. Takto vzniklé číslo sečtu se stejným číslem, ale napsaným pozpátku. Určete výsledek.

Trojciferné číslo si napíšu jako $100a+10b+c$. Můžu předpokládat, že $a > c$. Po odečtení převráceného čísla dostanu $100(a-c)+c-a$. Podle předpokladu je $c-a<0$, takže je nutné výsledek upravit, aby byla usnadněna práce při sčítání.

Vzniklé číslo si můžu napsat také jako $100(a-c-1)+90+(10+c-a)$. Číslo $a-c-1 \geq 0$, číslo $10+c-a>0 \wedge 10+c-a<10$, takže toto číslo má cifry $a-c-1; 9; 10+c-a$.

Toto číslo obrátíme a sečteme, čímž získáme $100(a-c-1+10+c-a)+90+90+$ $+10+c-a+a-c-1=900+180+9=1089$.

Výsledkem je tedy 1089.

5.2 Může být většina čísel z množiny $\{1; 2; \ldots; 1000000\}$ vyjádřena jako součet druhé mocniny a nezáporné třetí mocniny celého čísla? Svoje tvrzení zdůvodněte.

Přípustné druhé mocniny jsou $0^2; 1^2; \ldots; 1000^2$, přípustné třetí mocniny $0^3; 1^3; \ldots; 100^3$.

Maximální počet součtů, který můžeme z těchto čísel vytvořit, je $1001 \cdot 101 = 101101$, takže většina čísel z množiny v zadání nemůže být vyjádřena jako součet druhé mocniny a nezáporné třetí mocniny celého čísla.

5.3 Dokažte, že v (n^2+1)-ové soustavě je číslo, které vznikne zápisem čísla $n^2 \cdot (n^2+2)^2$ pozpátku, rovno $n^4 \cdot (n^2+2)^2$.

Označme si základ soustavy jako a, tedy $a = n^2+1$. Pak číslo $n^2 \cdot (n^2+2)^2$ je rovno $(a-1)\cdot(a+1)^2 = a^3+a^2-a-1 = a^3+(a-2)\cdot a+(a-1)$, takže se skládá z číslic $1, 0, (a-2), (a-1)$ (v tomto pořadí).

Číslo $n^4 \cdot (n^2+2)^2$ je rovno $(a-1)^2\cdot(a+1)^2 = a^4-2a^2+1 = (a-1)\cdot a^3+(a-2)\cdot a^2+1$, skládá se tedy z čísel $(a-1), (a-2), 0, 1$ (v tomto pořadí).

Cifry v druhém čísle jsou tedy přesně obráceně než v prvním čísle, čímž je úloha dokázána.

5.4 Najděte všechna přirozená čísla n tak, že $n^3-18n^2+115n-391$ je třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Nechť $f(n) = n^3-18n^2+115n-391$. Pak

$$f(n)-(n-5)^3 = -3n^2+40n-266 = -3\left(n^2-\frac{40}{3}n+\frac{266}{3}\right) =$$

$$= -3\left(n^2-\frac{40}{3}n+\frac{400}{9}+\frac{398}{9}\right) = -3\left(n-\frac{20}{3}\right)^2-\frac{398}{3} < 0.$$

Dále

$$f(n) - (n-6)^3 = 7n - 175 > 0$$

pro $n > 25$. Z výše uvedeného vyplývá, že pro $n > 25$ leží $f(n)$ mezi dvěma po sobě jdoucími třetími mocninami $(n-5)^3$ a $(n-6)^3$, takže $f(n)$ nemůže být třetí mocninou přirozeného čísla.

Pro $n = 25$ vychází $f(25) = 19^3$.

$$f(n) - (n-7)^3 = 3n^2 - 32n - 48 = (3n+4)(n-12) > 0$$

pro $n > 12$, tedy pro $n = 13; 14; \dots; 24$ leží $f(n)$ mezi dvěma po sobě jdoucími třetími mocninami $(n-6)^3$ a $(n-7)^3$.

Pro $n = 12$ je $f(12) = 5^3$, pro $n = 11$ je $f(11) = 3^3$. Ve zbývajících případech je $f(n) < 0$, takže nemůže být třetí mocninou přirozeného čísla.

Řešením jsou tedy čísla $11; 12$ a 25.

5.5 Nechť $x_1, \dots x_n$ jsou reálná čísla. Mějme následující implikaci:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq 0$$

Dokažte, že tato implikace platí pro $n \in \{3; 4\}$ a pro $n \geq 5$ neplatí.

$n = 3:$

$$0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3),$$

takže

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 0.$$

$n = 4:$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -(x_1 + x_3)^2 \leq 0.$$

$n \geq 5:$ Nechť $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = 2, x_i = 0$; $i > 5$. Je zřejmé, že předpoklad je splněn. Pak

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 = 1.$$

Pokud $n = 5$, je $x_1x_5 = 2$, takže celkový součet je 3. Pro $n > 5$ jsou ostatní sčítance nulové, takže součet je 1. Tedy pro $n \geq 5$ implikace neplatí.

5.6 Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla taková, že $abcd = 1$.

Dokažte, že potom $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} > 1$.

Nejdříve předpokládejme, že všechny součiny $ab, ac, ad, bc, bd, cd \geq 1$. Jejich součin je pak $(abcd)^3 \geq 1$. Ze zadání víme, že $abcd = 1, a, b, c, d > 0$. Jediná možnost, jak splnit podmínku ze zadání, je $ab = ac = ad = bc = bd = cd = 1$. $ab = ac \Rightarrow b = c$. Analogicky získáme $a = b; d = b$, tedy $a = b = c = d = 1$. V tomto případě je

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 > 1.$$

Pokud jeden ze součinů $ab, ac, ad, bc, bd, cd < 1$ (nechť $ab < 1$), pak

$$1 + a + 1 + b > 1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b) \Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} > 1.$$

Dále víme, že

$$\frac{1}{1+c} > 0 \wedge \frac{1}{1+d} > 0,$$

neboť $c > 0 \wedge d > 0$, takže máme

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} > 1.$$

5.7 Dokažte, že jediné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + y^2 + z^3 &= 3 \\ y + z^2 + x^3 &= 3 \\ z + x^2 + y^3 &= 3, \end{aligned}$$

kde $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, je $x = y = z = 1$.

Pokud $x, y \geq 1$, platí $x + y^2 \leq x^2 + y^3$. To tedy znamená, že $z^3 = 3 - (x + y^2) \geq \geq 3 - (x^2 + y^3) = z \Rightarrow z^3 \geq z$. $z > 0$, takže obě strany nerovnosti můžeme vydělit číslem z. Dostáváme $z^2 \geq 1 \Rightarrow z \geq 1$. Podle zadání musí platit $x + y^2 + z^3$, přitom $x, y, z \geq 1$, což je zřejmě splněno jen v případě $x = y = z = 1$.

Analogicky z předpokladu $x, y \leq 1$ získáme $z \leq 1$, a tedy $[x; y; z] = [1; 1; 1]$.

Z výše uvedeného tedy plyne, že pokud $[x; y; z] \neq [1; 1; 1]$, pak x a y jsou na opačné straně od 1. Analogicky ze stejného předpokladu zjistíme, že x a z jsou na opačných stranách vůči jedničce stejně jako y a z. Tím se ale dostáváme do sporu, protože z prvních dvou porovnání plyne, že y a z mají být na stejné straně jedničky.

Jediné řešení soustavy je tedy $x = y = z = 1$.