Vzorové řešení 4. série XI. ročníku BRKOSu

4.1 Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje n po sobě jdoucích čísel tak, že mezi nimi není žádné prvočíslo.

Vezměme si například číslo $(n+1)! + 2$. Toto číslo je zřejmě dělitelné dvěma. Platí totiž $(n+1)! + 2 = 2(\frac{(n+1)!}{2} + 1) = 2[(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 + 1]$. Další postup je už zřejmý.

$$\begin{aligned}
(n+1)! + 2 &= 2[(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 + 1] \\
(n+1)! + 3 &= 3[(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1] \\
&\vdots \\
(n+1)! + n &= n[(n+1) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1] \\
(n+1)! + n + 1 &= (n+1) \cdot [n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1]
\end{aligned}$$

Získali jsme posloupnost n čísel, z nichž ani jedno není prvočíslo, což jsme chtěli. Tím je úloha vyřešena.

4.2 Definujme vzdálenost $n-$písmenných slov A, B takto:
$\rho(A, B) = k$, kde k je počet pozic, na kterých se tato slova liší.

Dokažte, že pak platí $\forall A, B, C \in \mathbb{P}_n : \rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$, kde $\mathbb{P}_n$ je množina všech $n-$písmenných slov.

Pozn.: Máte tedy dokázat trojúhelníkovou nerovnost v metrice na množině slov

Nejprve si jednotlivé vzdálenosti označíme takto: $\rho(A, C) = a, \rho(A, B) = b, \rho(B, C) = = c$.

Nyní uvážíme pozice, na kterých se liší slova A a C. Pokud se na nějaké pozici liší, je zřejmé, že se na té stejné pozici liší i slova A a B nebo C a B.

Pokud se A a C neliší na některých pozicích, tak slovo B se buď taky neliší nebo se liší od obou slov.

Trochu to nyní srovnáme dohromady. Označme $\rho_i(A, B)$ vzdálenost slov A, B na i-té pozici. Je zřejmé, že může být 1 nebo 0 a platí $\sum_{i=1}^{n} \rho_i(A, B) = \rho(A, B)$.
Pokud $\rho_i(A, C) = 1 \Rightarrow \rho_i(A, B) + \rho_i(B, C) = 1 \vee 2. \Rightarrow \rho_i(A, C) \leq \rho_i(A, B) + \rho_i(B, C)$
Pokud $\rho_i(A, C) = 0 \Rightarrow \rho_i(A, B) + \rho_i(B, C) = 0 \vee 2. \Rightarrow \rho_i(A, C) \leq \rho_i(A, B) + \rho_i(B, C)$

Sečtením obou nerovností pro $\forall i$ získáme nerovnost ze zadání.

4.3 Definujme posloupnost přirozených čísel takto:
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ (tzv. Fibonacciho posloupnost).

Dokažte, že pak platí $\forall m \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$ následující rovnost: $a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k m.

1. $m = 1, m = 2$:
$$a_{n-1} \cdot a_1 + a_n \cdot a_2 = a_{n-1} + a_n = a_{n+1}$$
$$a_{n-1} \cdot a_2 + a_n \cdot a_3 = a_{n-1} + 2a_n = (a_{n-1} + a_n) + a_n = a_{n+1} + a_n = a_{n+2}$$
První krok se tedy povedl zdárně.

2. Nechť rovnost platí pro $m-1$ a m. Dokážeme platnost pro $m+1$, tedy $a_{n+m+2} =$ $= a_{n-1} \cdot a_{m+1} + a_n \cdot a_{m+2}$.
$$a_{n+m-1} = a_{n-1} \cdot a_{m-1} + a_n \cdot a_m$$
$$a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$$
Obě rovnosti sečteme.
$$a_{n+m-1} + a_{n+m} = a_{n-1} \cdot (a_{m-1} + a_m) + a_n \cdot (a_m + a_{m+1}) =$$
$$= a_{n-1} \cdot a_{m+1} + a_n \cdot a_{m+2}$$
Součet na levé straně nám dává a_{n+m+2}, což je přesně to, co jsme chtěli.

Vztah je tedy dokázán.

4.4 Mějme polynom $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $n-$tého stupně. Definujme pro něj zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x] : \varphi(P) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x$.

Dokažte, že zobrazení definované tímto způsobem je lineární, tedy že platí
$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$.

Na tento příklad se dá jít dvěma způsoby. Buď klasicky, tedy že se podosazuje vše potřebné, poupraví a něco vyjde. Anebo také tak, že si všimneme, že definované zobrazení vypadá, jako by to byl integrál polynomu. Lepší ale bude jít klasickou cestou.

$$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \varphi(\alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x + \alpha a_0 + \beta b_n x^n + \beta b_{n-1} x^{n-1} + \ldots +$$
$$+\beta b_1 x + \beta b_0) = \varphi((\alpha a_n + \beta b_n)x^n + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + \alpha a_0 + \beta b_0) =$$
$$= \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}}{n}x^n + \ldots + \frac{\alpha a_1 + \beta b_1}{2}x^2 + \frac{\alpha a_0 + \beta b_0}{1}x =$$
$$= \alpha\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_0}{1}x\right) +$$
$$+\beta\left(\frac{b_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_0}{1}x\right) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q).$$

Tvrzení jest tímto dokázáno.

4.5 Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové. Ukažte, že pak má následující soustava rovnic právě jedno řešení:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 &= 1 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 &= 9 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 &= 8 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 &= 9. \end{aligned}$$

Podmínkou právě jednoho řešení je nenulovost determinantu matice soustavy. Determinant této matice tedy spočítáme. Použijeme k tomu rozvoje podle 1. řádku.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -a & d & -c \\ -d & -a & b \\ c & -a & -b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & d & -c \\ c & -a & b \\ d & -b & -a \end{vmatrix} +$$

$$+c \begin{vmatrix} b & -a & -c \\ c & -d & b \\ d & c & -a \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & -a & d \\ c & -d & -a \\ d & c & -b \end{vmatrix}$$

Determinanty 3. řádu jdou spočítat už jednoduše. Po jejich vypočtení máme

$$a(-a^3 + bcd - bdc - ac^2 - ad^2 - ab^2) = -a^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

$$\begin{aligned} -b(a^2b + bd^2 + bc^2 - acd + acd + b^3) &= -b^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \\ -c(abd - abd - c^3 - a^2c - cd^2 - cb^2) &= -c^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \\ -d(b^2d + a^2d + c^2d + d^3 - abc + abc) &= -d^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Sečtením získáme

$$DET = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

Je vidět, že determinant je buď roven nule, anebo záporný. Přitom roven nule může být jen v jednom případě, a to právě tehdy, když $a = b = c = d = 0$.

Tímto jsme dokázali, že soustava má právě jedno řešení, jen když alespoň jedno z čísel a, b, c, d je nenulové.

4.6 Nechť $\alpha, r, s \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1), r, s \geq 0$. Pak platí

$$r^\alpha s^{1-\alpha} \geq \alpha r + (1 - \alpha)s.$$

Dokažte.

Bohužel se do zadání vloudila chyba, nerovnost má být opačná. Přesvědčit se o tom dá prostým dosazením některých hodnot.

Dokážeme tedy alespoň správnou nerovnost.

Pokud je jedno z čísel r, s rovno nule, je zřejmé, že nerovnost platí. Dále budeme tedy předpokládat, že $r \neq 0 \wedge s \neq 0$.

Nerovnost vydělíme číslem s:

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{\alpha} \leq \alpha\frac{r}{s} + 1 - \alpha$$

Zaveďme substituci $\frac{r}{s} = t$, čímž získáme nerovnost (po upravení)

$$t^{\alpha} - \alpha t + \alpha - 1 \leq 0.$$

Snadno se dá zjistit, že pro $t = 1$ nastává rovnost. Jak to dopadne pro ostatní t? Vyšetřeme chování funkce $t^{\alpha} - \alpha t + \alpha - 1$. Takže ji jednou zderivujeme, čímž získáme $\alpha t^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(t^{\alpha-1} - 1)$. Extrém, jak je vidět, nastává jen v bodě $t = 1$. Když dosadíme libovolné jiné t, zjistíme, že je funkce záporná, takže celkově platí nerovnost ze zadání (s obráceným znaménkem nerovnosti).

4.7 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

pak v případě $q < 1$ řada konverguje, v případě $q > 1$ diverguje.

Dokažte.

Definice limity posloupnosti:
$\lim_{n\to\infty} a_n = q \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |a_n - q| < \varepsilon$.
Dále $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty) \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : a_n > A(a_n < A)$.
Definice konvergence a divergence řady:
Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Definujme posloupnost částečných součtů:
$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$.
Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s, s \in \mathbb{R}$, pak řada konverguje. Jestliže $lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, pak řada diverguje.

Nechť $q > 1$. Pak $\exists n_o \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow$ pro posloupnost částečných součtů bude platit pro $i > n_0 : s_{i+1} = s_i + a_{i+1} \geq s_i + 1 \Rightarrow$ bude růst donekonečna. Proto pro $q > 1$ řada diverguje.

Nechť $q < 1$. Pak zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby $q + \varepsilon < 1$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$: $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1 \Rightarrow a_n < (q+\varepsilon)^n$. Na pravé straně máme člen geometrické posloupnosti. Pokud ji sečteme, získáme geometrickou řadu, jejíž součet umíme určit. V našem případě je $q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ součet není nekonečno, ale nějaké číslo. Tato řada je tedy konvergentní. Pro řadu $\sum a_n$ platí $a_n < (q+\varepsilon)^n$, je tedy zřejmé, že její součet může být nejvýše roven geometrické řadě $\sum(q+\varepsilon)^n$. Tedy pro $q < 1$ řada konverguje.

Ještě byste mohli namítnout, že pro všechny členy posloupnosti nemusí platit $a_n < q + \varepsilon$, takže by řada konvergovat nemusela. Je ale celkem zřejmé, že přidáním libovolného konečného počtu prvků do řady nezměníme její konvergenci nebo divergenci, proto nemusíme naše závěry opravovat.