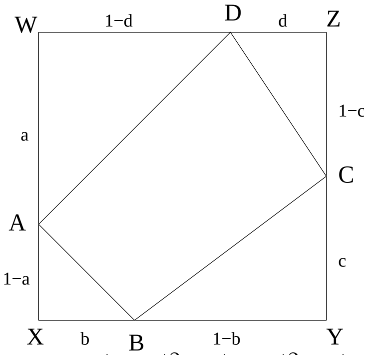
Vzorové řešení 3. série

3.1 Mějme čtverec $WXYZ$ o straně délky 1. Body A, B, C, D leží postupně uvnitř stran WX, XY, YZ, ZW.

Dokažte, že potom $2 \leq |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \leq 4$.



Označme si jednotlivé úseky na čtverci podle obrázku, přičemž $a, b, c, d \in (0, 1)$. Z Pythagorovy věty máme

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (1-a)^2 + b^2 \\ |BC|^2 &= (1-b)^2 + c^2 \\ |CD|^2 &= (1-c)^2 + d^2 \\ |AD|^2 &= (1-d)^2 + a^2 \end{aligned}$$

Potom $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2b + b^2 + c^2 +$
$+ 1 - 2c + c^2 + d^2 + 1 - 2d + d^2 + a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d) + 4 =$
$= 4 - 2[a(1-a) + b(1-b) + c(1-c) + d(1-d)]$.

Musíme tedy dokázat tyto nerovnosti:

$$2 \leq 4 - 2[a(1-a) + b(1-b) + c(1-c) + d(1-d)] \tag{1}$$

$$4 - 2[a(1-a) + b(1-b) + c(1-c) + d(1-d)] \leq 4. \tag{2}$$

První nerovnost si můžeme upravit takto:

$$L = a(1-a) + b(1-b) + c(1-c) + d(1-d) \leq 1.$$

Pro libovolné $x \in (0, 1)$ platí podle $A-G$ nerovnosti $\frac{1}{2} = \frac{x+(1-x)}{2} \geq \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq$ $\geq x(1-x)$. Dosazením do (1) máme $L \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ a tím je nerovnost dokázána.

Druhá nerovnost vypadá po úpravě následovně:

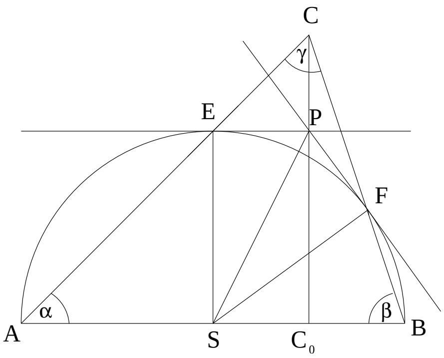
$$0 \leq a(1-a) + b(1-b) + c(1-c) + d(1-d).$$

Protože $a, b, c, d \in (0, 1)$, je $a > 0$, ale i $1 - a > 0$, platí tedy $a(1-a) > 0$.

Stejné nerovnosti platí i pro b, c, d, a tedy i druhá nerovnost platí.

3.2 Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad průměrem AB je sestrojena kružnice, která protíná stranu AC v bodě E a stranu BC v bodě F.

Dokažte, že tečny k této kružnici v bodech E a F a výška vedená z vrcholu C se protínají v jednom bodě.



$\triangle ESP \cong \triangle FSP$ podle věty Ssu (PS - společná strana, $|SE| = |SF| = r$, $|\angle PES| = |\angle PFS| = 90°$). Tedy $|PE| = |PF|$, proto bod P leží na ose úsečky EF. Trojúhelníky ASE a BSF jsou rovnoramenné, proto $|\angle AES| = \alpha$ a $|\angle BFS| = \beta \Rightarrow |\angle ASE| = 180° - 2\alpha \wedge |\angle BSF| = 180° - 2\beta$. $|\angle ESF| = 180° - (|\angle ASE| + |\angle BSF|) = 2\alpha + 2\beta - 180° = 2(180° - \gamma) - 180° = 180° - 2\gamma$. $|\angle EPF| = 360° - (|\angle PES| + |\angle PFS| + |\angle ESF|) = 2\gamma$.

$|PE| = |PF| \wedge |\angle EPF| = 2\gamma \Rightarrow \angle EPF$ je středový a $\angle ECF$ obvodový úhel příslušný $EF \Rightarrow P$ je střed kružnice opsané $\triangle EFC$.

Tedy $|PF| = |PC| \Rightarrow \triangle FPC$ je rovnoramenný $\Rightarrow |\angle PCF| = |\angle PFC| = 180° - (|\angle PFS| + |\angle SFB|) = 90° - \beta$.

$|\angle CC_0B| = 180° - (90° - \beta + \beta) = 90° \Rightarrow CP \perp AB \Rightarrow P$ leží na výšce na stranu AB.

3.3 Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo, jehož druhá mocnina má stejný počet dělitelů tvaru $3k-1$ jako $3k-2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Mějme přirozené číslo n a rozložme jej na součin prvočinitelů:

$$n = 3^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_j^{a_j}.$$

Pak

$$n^2 = 3^{2a_0} p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \dots p_j^{2a_j}.$$

Dělitelem čísla n^2, které není dělitelné třemi, je každé prvočíslo tvaru $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_j^{b_j}$, kde $\forall i \in \mathbb{N}, i \leq j : 0 \leq b_i \leq 2a_i$.

Celkem má tedy číslo n^2 $(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_j+1)$ dělitelů tvaru $3k+1$ a $3k+2$. Počet všech těchto dělitelů je lichý, proto nemůže být dělitelů tvaru $3k+1$ stejně jako dělitelů tvaru $3k+2$.

3.4 Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ a platí $ad - bc = 1$. Pro $u, v \in \mathbb{Z}$ definujme $u' = au + bv, v' = cu + dv$.

Dokažte, že $(u, v) = (u', v')$, kde (x, y) je největší společný dělitel čísel x, y.

Víme, že $u' = au + bv$ a $v' = cu + dv$. Z obou rovnic si vyjádříme $u : u = \frac{u'-bv}{a} = \frac{v'-dv}{c}$. Úpravou dostáváme $cu' - bcv = av' - adv \Rightarrow v(ad - bc) = av' - cu' \Rightarrow v = av' - cu'$.

Dosazením tohoto výsledku do rovnice pro u dostáváme $u = \frac{u'-bv}{a} = \frac{u'-bav'+bcu'}{a} = \frac{adu'-abv'}{a} = du' - bv'$.

Předchozí úpravy nejsou ekvivalentní v případech $a = 0$ nebo $c = 0$. Nyní objasníme případ, kdy $a = 0$, druhý případ je analogický.

$ad - bc = 1 \Rightarrow -bc = 1 \Rightarrow b = 1 \wedge c = -1$ nebo $b = -1 \wedge c = 1$. Nechť např. $b = 1 \wedge c = -1$, d je libovolné. Pak $u' = au + bv = v$ a $v' = cu + dv = -u + dv \Rightarrow u = du' - v'$.

Nyní se nám povedlo u i v vyjádřit jako lineární kombinaci u' a v', takže zbytek řešení je stejný jako v obecném případě.

Platí

$$(u,v) \mid u \ \wedge (u,v) \mid v \ \Rightarrow (u,v) \mid (au+bv) \wedge (u,v) \mid (cu+dv) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u,v) \mid u' \wedge (u,v) \mid v' \Rightarrow (u,v) \mid (u',v') \tag{1}$$
$$(u',v') \mid u' \wedge (u',v') \mid v' \Rightarrow (u',v') \mid (du'-bv') \wedge (u',v') \mid (av'-cu') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u',v') \mid u \wedge (u',v') \mid v \ \Rightarrow (u',v') \mid (u,v) \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne, že $(u,v) = (u',v')$, čímž je úloha dokázána.

3.5 Reálná čísla x, y splňují dvě následující rovnosti:

$$\log_8 x + \log_4 y^2 = 5$$
$$\log_8 y + \log_4 x^2 = 7.$$

Určete, čemu je roven výraz xy.

Postupně upravíme rovnice ze zadání.

$$\log_8 x + \log_4 y^2 = 5 \Rightarrow 2^{\log_8 x + \log_4 y^2} = 2^5$$

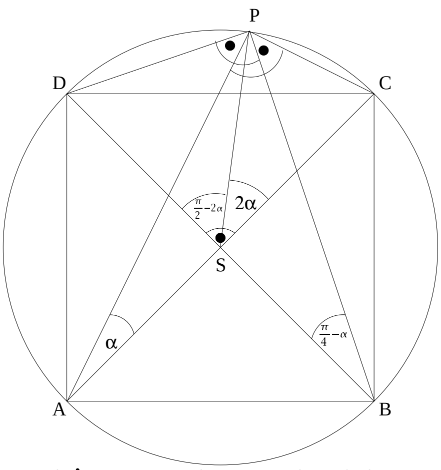
$$2^{\log_8 x + \log_4 y^2} = 2^{\frac{1}{\log_x 8} + \frac{2}{\log_y 4}} = 2^{\frac{1}{\log_x 2^3} + \frac{2}{\log_y 2^2}} = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x + \log_2 y} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\log_2 y} =$$
$$= x^{\frac{1}{3}} y = 2^5$$

Analogicky dostaneme
$$2^{\log_8 y + \log_4 x^2} = y^{\frac{1}{3}} x = 2^7.$$

Z těchto výsledků dostáváme $(xy)^{\frac{4}{3}} = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{12} \Rightarrow xy = (2^{12})^{\frac{4}{3}} = 2^9 = 512.$

3.6 Mějme čtverec $ABCD$, kterému je opsána kružnice a nechť P je bod, který leží na kratším z oblouků CD.

Dokažte, že pak $|PA|^2 - |PB|^2 = |PB||PD| - |PA||PC|$.



Označme si střed kružnice opsané čtverci $ABCD$ jako S a $|\angle PAC| = \alpha$. Potom $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle$. Tento úhel je obvodový úhel příslušný oblouku PC, středový úhel příslušný tomuto oblouku je $\angle PSC$, takže $|\angle PSC| = 2\alpha$. Dále zřejmě $|\angle DSP| = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ a $|\angle DBP| = = \frac{\pi}{4} - \alpha$, neboť $\angle DSP$ a $\angle DBP$ jsou středový a obvodový úhel příslušný oblouku PD. Dále úhly DPB a APC jsou pravé, neboť daná kružnice je Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměry BD i AC.

Nechť r je poloměr dané kružnice. Potom $|BD| = |AC| = 2r$. Nyní si už můžeme vyjádřit délky úseček, které budeme potřebovat k vyřešení této úlohy.

$|PA| = 2r\cos\alpha$, $|PB| = 2r\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, $|PC| = 2r\sin\alpha$ a $|PD| = 2r\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Potom $\underline{|PA|^2 - |PB|^2} = 4r^2\cos^2\alpha - 4r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 4r^2[\cos^2\alpha - (\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha +$
$+ \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha)^2] = 4r^2[\cos^2\alpha - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2] = 2r^2[2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha +$
$+ 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)] = 2r^2(\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha) = \underline{2r^2(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)}.$

$\underline{|PB||PD| - |PA||PC|} = 2r\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot 2r\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 2r\cos\alpha \cdot 2r\sin\alpha =$
$= 2r^2[2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 2\sin\alpha\cos\alpha] = 2r^2[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \sin 2\alpha] =$
$= \underline{2r^2(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)}.$

Úpravy byly ekvivalentní, oba získané výrazy jsou stejné, úloha je tedy dokázána.

3.7 Najděte všechna $a \in \mathbb{R}$ tak, aby součet druhých mocnin kořenů rovnice

$$x^3 + (a^2+1)x^2 - (4a+3)x + 1 = 0$$

byl minimální.

Nejvhodnější cesta k vyřešení této úlohy vede přes Viétovy vztahy: mějme polynom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak pro jeho kořeny $x_1, x_2, \ldots x_n$ platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j \\ &\vdots \\ (-1)^n\frac{a_0}{a_n} &= x_1 x_2 \ldots x_n \end{aligned}$$

V našem případě bude platit

$$-\frac{a_2}{a_3} = x_1 + x_2 + x_3 \tag{1}$$
$$\frac{a_1}{a_3} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \tag{2}$$
$$-\frac{a_0}{a_3} = x_1x_2x_3 \tag{3}$$

Poslední vztah nebudeme dále potřebovat.

Dosazením ze zadání dostáváme

$$\begin{aligned} -(a^2+1) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ -(4a+3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \end{aligned}$$

Součet druhých mocnin kořenů si vyjádříme takto:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$
$$= [-(a^2+1)]^2 - 2[-(4a+3)] = a^4 + 2a^2 + 8a + 7.$$

Nyní potřebujeme zjistit, pro jaké a nabývá tento výraz minimální hodnoty. Bez užití diferenciálního počtu (se kterým by řešení bylo elegantnější) budeme upravovat:

$$a^4 + 2a^2 + 8a + 7 = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 + 8a + 4 + 2 = (a^2-1)^2 + 4(a+1)^2 + 2 =$$
$$= \underline{(a+1)^2[(a-1)^2 + 4] + 2}.$$

Tento výraz zřejmě nabývá minimální hodnoty 2 pro $a = -1$.