Vzorové řešení 2. série XI. ročníku BRKOSu

2.1 Předpokládejte, že $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{3}$ pro nějaký úhel $x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Vyjádřete $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ pro stejné x.

Ze součtových vzorců nebo Moivreovy věty máme vztahy

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x\\ \sin 3x &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x.\end{aligned}$$

Nyní tedy máme

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x}{\cos x} = \cos^2 x - 3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x = \frac{1}{3}.$$

Podobně upravíme i druhý vztah.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x}{\sin x} = 3\cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= 3 - 4\sin^2 x = 2 + (1 - 4\sin^2 x) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Získali jsme tedy výsledek $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{7}{3}$.

2.2 Nechť $p = (a_1, a_2, \ldots, a_{17})$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \ldots, 17$. Označme k_p největší index k takový, že ještě platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k < a_{k+1} + \ldots + a_{17}.$$

Určete největší a nejmenší hodnotu k_p.

Je-li $p = (a_1, a_2, \ldots, a_{17})$ uvažované pořadí a k_p příslušný index, pak zřejmě platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p} < a_{k_p+1} + \ldots + a_{17} = 153 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p}) < 153 \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p} \leq 76.$$

Platí tedy

$$\frac{1}{2}k_p \cdot (k_p + 1) = 1 + 2 + \ldots + k_p \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p} \leq 76,$$

tedy

$$k_p \cdot (k_p + 1) \leq 152 \Rightarrow k_p \leq 11.$$

Například pro pořadí $p_1 = (1, 2, \ldots, 17)$ vyjde $k_{p_1} = 11$, takže 11 je největší hodnota k_p.

Součet všech členů v každém pořadí je $1 + 2 + \ldots + 17 = 153$, což je liché číslo, takže vždy platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p} < a_{k_p+1} + \ldots a_{17}$$

a zároveň

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p+1} < a_{k_p+2} + \ldots a_{17}.$$

To znamená, že pro libovolná navzájem opačná pořadí p_1, p_2 je $k_{p_1} + k_{p_2} = 16$. Z toho vyplývá, že pro nejmenší hodnotu k_p platí $k_p = 16 - 11 = 5$.

2.3 Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^+, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = 1, k, n \in \mathbb{N}$.

Dokažte, že potom platí nerovnost $(n + a_1) \cdot (n + a_2) \cdot \ldots \cdot (n + a_k) \geq (n + 1)^k$.

V tomto příkladu využijeme $A - G$ nerovnosti pro $n + 1$ členů:

$$\forall x_1, x_2, \ldots x_{n+1} \in \mathbb{R}^+ : \frac{x_1 + \ldots + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + \ldots x_{n+1} \geq (n+1) \cdot \sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}}.$$

Platí: pro

$$\forall i \in 1, 2, \ldots, k : n + a_i = \underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + \ldots + a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}_{\text{n-krát}} + a_i \geq$$

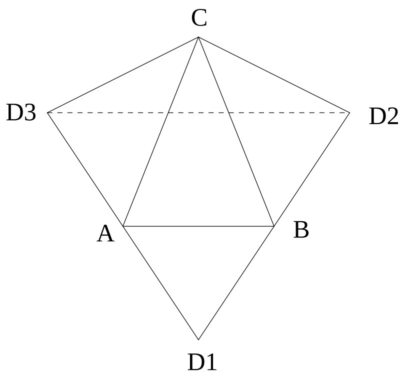
$$\geq (n+1) \cdot \sqrt[n+1]{(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k)^n \cdot a_i} \Rightarrow (n + a_1) \cdot (n + a_2) \cdot \ldots \cdot (n + a_k) \geq$$

$$\geq (n+1)^k \cdot \sqrt[n+1]{(\underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}_{=1})^{kn} \cdot \underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}_{=1}} = (n+1)^k.$$

Tím je úloha dokázána.

2.4 Je dán čtyřstěn $ABCD$, přičemž platí $|\angle BAC| + |\angle CAD| + |\angle DAB| = |\angle ABC| + + |\angle CBD| + |\angle DBA| = 180°$.

Dokažte, že $|CD| \geq |AB|$.



Na obrázku je daný čtyřstěn rozložen do rovinné sítě tak, že se stěny ABD, BCD, CAD otočily kolem odpovídajících hran stěny ABC. Z rovností ze zadání je zřejmé, že body D_3, A, D_1 a také body D_2, B, D_1 leží na jedné přímce. Dále platí $|D_3A| = |D_1A| \wedge |D_2B| = |D_1B| \wedge \wedge |D_3C| = |D_2C| \Rightarrow AB$ je střední příčkou v $\triangle D_1D_2D_3$ a z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $2|AB| = |D_2D_3| \leq |D_2C| + |D_3C| = = 2|CD|$. Odtud dostáváme požadovanou nerovnost $|CD| \geq |AB|$.

2.5 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo k takové, že zápis čísla $k \cdot 2^n$ v desítkové soustavě se skládá jen z jedniček a dvojek.

Ukážeme, že pro každé n existuje n-ciferné číslo složené z jedniček a dvojek dělitelné 2^n. Označme toto číslo a_n.

Pro $n = 1$ evidentně $a_n = 2$.

Předpokládejme, že existuje číslo a_n a ukážeme, že existuje číslo a_{n+1}.

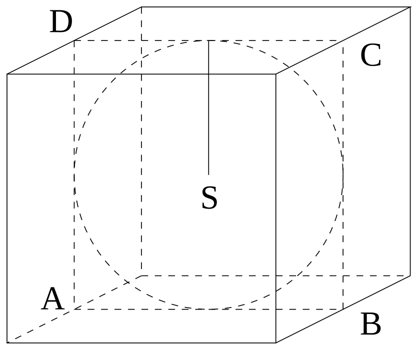
Je-li $a_n \equiv 0 (\text{mod } 2^{n+1})$, pak $2^{n+1} \mid a_n \wedge 2^{n+1} \mid 2 \cdot 10^n \Rightarrow 2^{n+1} \mid 2 \cdot 10^n + a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{n+1} = 2 \cdot 10^n + a_n$.

Je-li $a_n \not\equiv 0 (\text{mod } 2^{n+1})$, pak $2^n \mid 10^n \wedge 2^{n+1} \nmid 10^n \wedge 2^n \mid a_n \wedge 2^{n+1} \nmid a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{n+1} \mid 10^n + a_n \Rightarrow a_{n+1} = 10^n + a_n$.

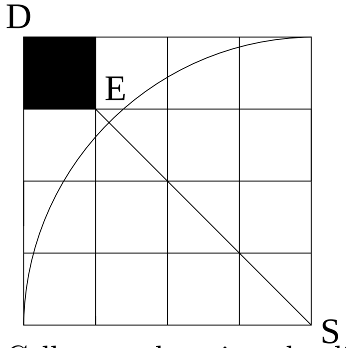
Tedy pro každé n existuje přirozené k takové, že $k \cdot 2^n$ je složeno z jedniček a dvojek.

2.6 Mějme kouli o poloměru 1, která obsahuje 1300 daných bodů.

Dokažte, že uvnitř této koule leží koule o poloměru $\frac{2}{9}$, která obsahuje 4 z daných bodů.



Na obrázku je koule o poloměru 1 vepsaná v krychli o hraně 2. Touto krychlí vedeme řez $ABCD$.



$SE = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$ krychličky o hraně $\frac{1}{4}$, které jsou u hran krychle o hraně 2, budou ležet mimo danou jednotkovou kouli. Navíc, když krychličce o hraně $\frac{1}{4}$ opíšeme kouli, bude mít tato koule poloměr $r = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{2}{9}$.

Celkem tedy mimo kouli leží $8 + 12 \cdot 6 = 80$ krychliček. Koule bude rozdělena na $512 - 80 = 432$ částí, z nichž každá se beze zbytku vejde do koule o poloměru $\frac{2}{9}$. Když do každé z 432 částí umístíme 3 body, spotřebujeme 1296 bodů. Musíme ještě rozdělit 4 body, takže aspoň v jedné kouli o poloměru $\frac{2}{9}$ budeme mít alespoň 4 body.

2.7 Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

Do rovnice

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

dosadíme $x = 1$:

$$f(f(y) + 1) = y + f(1). \tag{1}$$

Nyní do rovnice ze zadání dosadíme za $y = f(z) + 1$:

$$f(xf(f(z) + 1) + x) = x(f(z) + 1) + f(x).$$

Použitím rovnosti (1) dostáváme

$$\begin{aligned} f(x(z + f(1)) + x) &= xf(z) + x + f(x) \\ f(x(z + f(1) + 1)) &= xf(z) + x + f(x). \end{aligned}$$

Do této rovnice dosadíme $z = -f(1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= xf(-f(1)) + f(x) + x \\ 0 &= x(1 + f(-f(1)) \Rightarrow f(-f(1)) = -1. \end{aligned}$$

Do rovnice ze zadání dosadíme $y = -f(1)$:

$$f(xf(-f(1)) + x) = -xf(1) + f(x).$$

Použitím $f(-f(1)) = -1$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(-x+x) &= f(x) - xf(1) \\ f(x) &= xf(1) + f(0). \end{aligned}$$

Dosazením $x = 1$ dostáváme

$$f(1) = f(1) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = xf(1).$$

Nyní upravíme rovnici ze zadání:

$$\begin{aligned} f(xyf(1) + x) &= xy + xf(1) \\ xyf^2(1) + xf(1) &= xy + xf(1) \\ xyf^2(1) &= xy. \end{aligned}$$

Poslední rovnost musí platit pro všechna x, y, musí tedy nutně platit

$$f^2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1 \Rightarrow f(x) = \pm x.$$

Rovnici tedy splňují právě dvě funkce $f(x) = x$ a $f(x) = -x$.