Vzorové řešení 1. série XI. ročníku BRKOSu

1.1 Dokažte pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_2 \cdot \cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1} \cdot \cos x_n + \sin x_n \cdot \cos x_1 \leq \frac{n}{2}.$$

Pro $a, b \geq 0$ platí $A - G$ nerovnost $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, tedy pro libovolná reálná x_i, x_j, kde $i, j \in \mathbb{N}$ je $\sin^2 x_i \geq 0, \cos^2 x_j \geq 0$, tedy $\frac{\sin^2 x_i + \cos^2 x_j}{2} \geq \sqrt{\sin^2 x_i \cdot \cos^2 x_j} = |\sin x_i \cdot \cos x_j| \geq \sin x_i \cdot \cos x_j$. To využijeme k důkazu nerovnosti ze zadání.

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \cos^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n + \cos^2 x_n\right) =$$

$$= \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2} + \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2} + \ldots + \frac{\sin^2 x_{n-1} + \cos^2 x_n}{2} + \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2} \geq$$

$$\geq \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_2 \cdot \cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1} \cdot \cos x_n + \sin x_n \cdot \cos x_1.$$

1.2 V rovině je dáno několik přímek. Za území považujeme útvar, který je ohraničen částmi daných přímek a uvnitř nějž neleží část žádné přímky.

Dokažte, že potom lze tato území obarvit dvěma barvami (každé území jednou barvou) tak, že žádná dvě sousedící území nemají stejnou barvu.

Pozn.: Dvě území spolu sousedí, pokud mají společnou úsečku.

Tento příklad budeme dokazovat matematickou indukcí:

1. V rovině je jedna přímka. Pak obě poloviny určené touto přímkou obarvíme dvěma různými barvami.
2. Předpokládejme, že v rovině je n přímek a že všechna vzniklá území jsou obarvena dvěma barvami tak, že žádná dvě sousedící nemají stejnou barvu. Přidejme do roviny libovolnou přímku p, která není totožná s žádnou z předchozích přímek. Potom v jedné polorovině s hraniční přímkou p barvy necháme a ve druhé polorovině všechna území přebarvíme na druhou barvu. Pokud mají nyní nějaká dvě území společnou úsečku, která neleží na přímce p, podle indukčního předpokladu nemají stejnou barvu. Pokud naopak nějaká dvě území mají společnou úsečku, která leží na přímce p, musela tato dvě území vzniknout rozdělením nějakého dřívějšího území přímkou p na dvě části. Tato dvě nová území leží v různých polorovinách s hraniční přímkou p, tudíž nemají stejnou barvu.

Tím je důkaz hotov.

1.3 Dokažte, že z libovolných 79 celých čísel lze vybrat několik tak, že jejich součet je dělitelný číslem 75.

79 celých čísel si označíme $a_1, a_2, \ldots, a_{79}$. Nechť $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_{75} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{75}$. Pokud je některý ze součtů dělitelný číslem 75, úloha je vyřešena. Pokud není, pak podle Dirichletova principu $\exists i, j \in \{1, 2. \ldots, 75\}, i < j$ tak, že po dělení číslem 75 dávají S_i a S_j stejný zbytek. Potom $75 \mid (S_j - S_i) \Rightarrow 75 \mid (a_j + a_{j-1} + \ldots + a_{i+1})$. K důkazu této úlohy nám tedy stačilo pouze 75 celých čísel.

1.4 Strany trojúhelníka mají délky a, b, c, kde $a, b, c \in \mathbb{N}, a > b$ a úhel naproti straně c má velikost $60°$. Dokažte, že a musí být složené číslo.

$a > b \Rightarrow$ u vrcholu A bude větší úhel než u vrcholu B, tedy $\alpha > \beta$, zároveň $\alpha + \beta + 60° = = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 120°$. Potom $\alpha > \gamma > \beta \Rightarrow \underline{a > c > b}$.

Podle kosinové věty platí: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab \Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 - ab \Rightarrow \Rightarrow (c + b)(c - b) = a(a - b)$.

Předpokládejme, že a je prvočíslo. Zřejmě $a \mid a(a - b)$, tedy musí platit $a \mid (c + b)(c - b) \Rightarrow \Rightarrow a \mid (c+b) \vee a \mid (c-b)$. Zároveň $(c-b) < a$ (protože $c < a$), pak $a \mid (c+b) \Rightarrow c+b = ka, k \in \mathbb{N}$. Zároveň $c + b < 2a$, protože $c < a$, $b < a$, tedy $c + b = a$.

Víme: $(c + b)(c - b) = a(a - b) \Rightarrow a(c - b) = a(a - b) \Rightarrow ac = aa \Rightarrow c = a$ (neboť $a \neq 0$) - to je spor, protože $a > c$. Tedy předpoklad, že a je prvočíslo, byl chybný, tedy a je složené číslo.

1.5 Najděte všechna celá čísla b, c tak, aby bylo $x = \sqrt{200} + \sqrt{4}$ kořenem rovnice

$$x^4 + 2bx^3 + 3bx^2 + 4c = 0.$$

Úlohu vyřešíme tak, že do rovnice dosadíme za x číslo $\sqrt{200} + \sqrt{4} = 2 \cdot (1 + 5\sqrt{2})$.

$2^4 \cdot (1 + 5\sqrt{2})^4 + 2b \cdot 2^3 \cdot (1 + 5\sqrt{2})^3 + 3b \cdot 2^2 \cdot (1 + 5\sqrt{2})^2 + 4c = 0$.

Roznásobením a úpravou vyjde $44816 + 16320\sqrt{2} + b(3028 + 4360\sqrt{2}) + 4c = 0$.

Víme, že $b, c \in \mathbb{Z}$, takže můžeme vypočítat samostatně část, kde se vyskytuje $\sqrt{2}$, protože z něj po vynásobení libovolným racionálním číslem nezískáme racionální číslo.

$$\sqrt{2} \cdot (16320 + 4360b) = 0 \Rightarrow b = -\frac{408}{109}.$$

Číslo b není celé, úloha tedy nemá řešení v $\mathbb{Z}$.

1.6 Pro která přirozená čísla n je $7^n - 1$ násobkem čísla $6^n - 1$?

Každé číslo tvaru $6^n - 1 = (6 - 1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \ldots + 6 + 1)$ pro $n \in \mathbb{N}$ je dělitelné pěti. Probereme tedy zbytky mocnin $7^i, i \in \mathbb{N}$ po dělení pěti.

$i = 1$**:** $7^1 \equiv 7 \equiv 2 \pmod 5$

$i = 2$**:** $7^2 \equiv 49 \equiv 4 \pmod 5$

$i = 3$**:** $7^3 \equiv 343 \equiv 3 \pmod 5$

$i = 4$**:** $7^4 \equiv 7^2 \cdot 7^2 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 5$

Z posledního řádku můžeme zjistit, že pro $\forall k \in \mathbb{N}$ platí $7^{4k} \equiv (7^4)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 5$. Tím získáme následující:

$i = 1$: $7^{4k+1} \equiv 2 \pmod 5$

$i = 2$: $7^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5$

$i = 3$: $7^{4k+3} \equiv 3 \pmod 5$

$i = 4$: $7^{4k} \equiv 1 \pmod 5$

Z výše uvedeného plyne, že $5 \mid (7^{4k} - 1), k \in \mathbb{N}$, ale pro taková $n = 4k$ platí $6^n - 1 = 6^{4k} - 1 = = 36^{2k} - 1 = (7 \cdot 5 + 1)^{2k} - 1 = 7l + 1 - 1 = 7l$ pro nějaké vhodné $l \in \mathbb{N}$.

V úvahu připadala pouze čísla $n = 4k$, pro ty je ale $6^n - 1$ dělitelné sedmi, tedy číslo $7^n - 1$ nemůže být násobkem čísla $6^n - 1$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$.

1.7 Najděte všechna řešení (x, p) rovnice dvou proměnných

$$x^4 + 4^x = p,$$

kde x je celé číslo a p prvočíslo.

Probereme všechny možnosti hodnot x a z nich pak určíme prvočíslo p.

1. $x < 0 \Rightarrow 4^x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^4 + 4^x \notin \mathbb{Z}$ - nelze najít vhodné prvočíslo.
2. $x = 0 \Rightarrow 0^4 + 4^0 = 1$. 1 ale není prvočíslo.
3. $x = 1 \Rightarrow 1^4 + 4^1 = 5 = p$. Máme jedno řešení $(1, 5)$.
4. $x = 2k, k \in \mathbb{N} : (2k)^4 + 4^{2k} = 16k^4 + 16^k = 16(k^4 + 16^{k-1})$. $k \in \mathbb{N}$, tedy $k^4 \geq 1 \wedge 16^{k-1} \geq 1 \Rightarrow k^4 + 16^{k-1} \geq 2 \Rightarrow 16(k^4 + 16^{k-1})$ je složené číslo, v tomto případě řešení není.
5. $x = 2k+1, k \in \mathbb{N} : (2k+1)^4 + 4^{2k+1} = (2k+1)^4 + 4 \cdot 4^{2k} = (2k+1)^4 + 2 \cdot (2k+1)^2 \cdot 2 \cdot 4^k + + 4 \cdot 4^{2k} - 4 \cdot (2k+1)^2 \cdot 2^{2k} = [(2k+1)^2 + 2 \cdot 4^k]^2 - [2 \cdot (2k+1) \cdot 2^k]^2 = [(2k+1)^2 + 2 \cdot 2^{2k} + + 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1)] \cdot [(2k+1)^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1)] = [x^2 + 2x \cdot 2^k + (2^k)^2 + 2^{2k}] \cdot \cdot [x^2 - 2x \cdot 2^k + (2^k)^2 + 2^{2k}] = \underbrace{[(x + 2^k)^2 + 2^{2k}]}_{\geq 2} \cdot \underbrace{[(x - 2^k)^2 + 2^{2k}]}_{\geq 2}$. Znovu máme složené číslo.

Jediné řešení je $(x, p) = (1, 5)$.