Vzorové řešení 6. série X. ročníku BRKOSu

6.1 Najděte všechna přirozená čísla, která jsou řešením rovnice:

$$3x^2 - 10x - 26 = 0.$$

Na první pohled se zdá, že tato rovnice řešení v přirozených číslech nemá. Diskriminant uvedené rovnice je totiž 412, což zcela určitě není druhá mocnina přirozeného čísla. Skutečnost je ale jiná. Rovnice řešení má, ale je tu háček v tom, že není zapsána v desítkové soustavě.

Zápis v obecné soustavě o základu n, $n \in \mathbb{N}$ vypadá takto:

$$3x^2 - nx - (2n + 6) = 0.$$

Nyní spočteme diskriminant:

$$D = n^2 - 4 \cdot 3 \cdot [-(2n + 6)] = n^2 + 24n + 72.$$

Víme o něm, že je druhou mocninou přirozeného čísla, tedy

$$n^2 + 24n + 72 = k^2.$$

Spočteme další diskriminant, který opět ze zřejmých důvodů musí být druhou mocninou přirozeného čísla:

$$D_1 = 24^2 - 4(72 - k^2) = 288 + 4k^2 = c^2,\ c \in \mathbb{N}.$$

Je celkem zřejmé, že c je sudé. Existuje tedy $e \in \mathbb{N}$ takové, že $e^2 - k^2 = (e - k)(e + k) = 72 = 2^3 \cdot 3^2$. Získáme tak 6 soustav dvou rovnic o dvou neznámých. Řešení poskládáme do tabulky:

$(e-k)$	1	2	3	4	6	8
$(e+k)$	72	36	24	18	12	9
e	36.5	19	13.5	11	9	8.5
k	35.5	17	10.5	7	3	0.5

Zajímají nás celočíselné hodnoty, které budeme dosazovat do rovnice $n^2 + 24n + 72 = k^2$, ze které získáme hledaný základ soustavy.

k=17: $n^2 + 24n + 72 - 17^2 = n^2 + 24n - 217 = 0 \Longrightarrow n_1 = 7 \wedge n_2 = -31$

k=7: $n^2 + 24n + 72 - 7^2 = n^2 + 24n + 23 = 0 \Longrightarrow n_1 = -23 \wedge n_2 = -1$

k=3: $n^2 + 24n + 72 - 3^2 = n^2 + 24n + 63 = 0 \Longrightarrow n_1 = -21 \wedge n_2 = -3$

Získali jsme jediné kladné řešení, a to $n = 7$, což je hledaný základ. Rovnice ze zadání se pak přetransformuje do rovnice

$$3x^2 - 7x - 20 = 0 \Longrightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Získali jsme tedy jen jedno řešení z oboru přirozených čísel.

6.2 Jedna z výšek $\triangle ABC$ je menší než každá z jeho stran a tvoří s délkami stran $\triangle ABC$ čtyři za sebou jdoucí přirozená čísla. Určete velikost této výšky.

Délky stran trojúhelníka si označíme $a-1, a, a+1$. Výhodnost tohoto označení se ukáže později. Výška má pak délku $a-2$.

Využijeme dvou vztahů pro výpočet obsahu trojúhelníka, a to Heronova vzorce $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$ (v našem případě $s = \frac{a-1+a+a+1}{2} = \frac{3a}{2}$) a „klasického“ vzorce $S = \frac{av_a}{2}$.

Podle Heronova vzorce máme

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{3a}{2} - a + 1\right) \cdot \left(\frac{3a}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{3a}{2} - a - 1\right)}$$

$$S^2 = \frac{1}{16}(3a) \cdot (3a - 2a + 2) \cdot (3a - 2a) \cdot (3a - 2a - 2) = \frac{3}{16}a^2 \cdot (a+2) \cdot (a-2)$$

Nyní musíme vyšetřit tři případy pro tři možné polohy výšky.

1. Výška je kolmá na stranu o délce $a-1$.
   Budeme porovnávat obsahy podle dvou výše zmíněných vzorců. Tyto obsahy se samozřejmě musejí rovnat.

   $$\frac{3}{16}a^2 \cdot (a-2) \cdot (a+2) = \frac{(a-1)^2 \cdot (a-2)^2}{4}$$

   Po úpravách dostaneme rovnici $a^3 - 22a^2 + 20a - 8 = 0$. Snadno se dá zjistit (např. pomocí Hornerova schématu), že tento polynom nemá kořeny v oboru přirozených čísel.
2. Výška je kolmá na stranu o délce a.
   Zde dostáváme

   $$\frac{3}{16}a^2 \cdot (a-2) \cdot (a+2) = \frac{a^2 \cdot (a-2)^2}{4}.$$

   Po úpravách vyjde $a - 14 = 0 \Longrightarrow a = 14$. Zde řešení máme, velikost výšky je 12.
3. Výška je kolmá na stranu o délce $a+1$.
   V tomto případě budeme hledat řešení rovnice

   $$\frac{3}{16}a^2 \cdot (a-2) \cdot (a+2) = \frac{(a-2)^2 \cdot (a+1)^2}{4}.$$

   Po úpravách získáme rovnici $a^3 - 6a^2 - 12a - 8 = 0$, která nemá řešení v oboru přirozených čísel. Opět se o tom můžeme snadno přesvědčit použitím Hornerova schématu.

Velikost výšky je tedy 12.

6.3 Je dána aritmetická posloupnost $308, 973, 1638, 2303, 2968, 3633, 4298$. Určete geometrickou posloupnost přirozených čísel $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ tak, že $308 < b_1 < 973 < b_2 < 1638 < b_3 < 2303 <$ $< b_4 < 2968 < b_5 < 3633 < b_6 < 4298$.

Nechť koeficient hledané posloupnosti je q. Hledané členy tedy budou tvaru $b_1, qb_1, q^2b_1, \ldots q^5b_1$. Ze zadání platí $973 < qb_1 \wedge q^5b_1 < 4298 \Longrightarrow 973q^5b_1 < 4298qb_1 \Longrightarrow q^4 < \frac{4298}{973} \Longrightarrow q < 1.45$.

Dále $b_1 < 973 \wedge 3633 < q^5b_1 \Longrightarrow \frac{3633}{973} < q^5 \Longrightarrow q > 1.30$.

Pokud by q bylo iracionální, pak by qb_1 nemohlo být přirozené, tedy $q = \frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{N}$. Nechť zlomek $\frac{r}{s}$ je v základním tvaru, tedy $(r, s) = 1$.

$q^5 b_1 \in \mathbb{N} \implies \frac{r^5 b_1}{s^5} \in \mathbb{N} \implies s^5 \mid b_1$, neboť $(r,s) = 1$. Pokud $s \geq 4$, potom $s^5 \geq 1024 \implies$ $\implies b_1 \geq 1024$, což je spor s $b_1 < 973$. Pro $s = 1$ nebo $s = 2$ nelze nalézt vhodné $r \in \mathbb{N}$ tak, aby $1.30 < \frac{r}{s} < 1.45$. Zbývá tedy jediná možnost, a to $s = 3 \wedge r = 4 \implies q = \frac{4}{3}$.

Dále platí $2303 < q^3 b_1 \implies 2303^2 < \frac{4}{3} q^5 b_1^2 \wedge q^5 b_1 < 4298 \implies b_1 > \frac{\frac{3}{4} \cdot 2303^2}{4298} > 925$. Dále $3^5 \mid b_1$. Aby platilo $b_1 > 925 \wedge b_1 < 973$, pak $b_1 = 4 \cdot 3^5 = 972$. Další členy posloupnosti se už snadno dopočítají.

Celá posloupnost pak vypadá takto: 972, 1296, 1728, 2304, 3072, 4096.

6.4 Najděte všechna trojciferná čísla, která se rovnají součtu třetích mocnin svých cifer.

Po „matematizaci" úloha vypadá následovně: $a^3 + b^3 + c^3 = 100a + 10b + c,\ a, b, c \in \mathbb{N}_0,\ a \neq 0$.

Po úpravě dostáváme $(a^3 - 100a) + (b^3 - 10b) + (c^3 - c) = 0$.

V následující tabulce jsou uvedeny hodndoty, jakých nabývají jednotlivé členy rovnice pro povolené hodnoty a, b, c. Pak vyhledáme všechny trojice, jejichž ciferný součet je 0.

	$a^3 - 100a$	$b^3 - 10b$	$c^3 - c$
0		0	0
1	-99	-9	0
2	-192	-12	6
3	-273	-3	24
4	-336	24	60
5	-375	75	120
6	-384	156	210
7	-357	273	336
8	-288	432	502
9	-171	639	720

	$a^3 - 100a$	$b^3 - 10b$	$c^3 - c$
0			
1	-99	-9	
2	-192	-12	6
3	-273	-3	24
4	-336	24	60
5	-375	75	120
6	-384	156	210
7	-357	273	336
8	-288		
9	-171		

Proč je ve druhé tabulce méně čísel? Smazali jsme 4 čísla, protože jsou příliš velká a nenašli bychom k nim žádnou dvojici tak, aby součet byl 0. Také jsme našli trojice čísel tak, že jedno číslo je rovno 0 a zároveň také součet všech čísel je 0. Získali jsme takto čísla $370, 371, 407$.

Hodnoty $c^3 - c$ jsou sudé, je proto výhodné rozdělit si tabulku na dvě části tak, že v jedné budou v prvních dvou sloupcích lichá čísla a v druhé čísla sudá.

	$a^3 - 100a$	$b^3 - 10b$	$c^3 - c$
0			
1	-99	-9	
2			6
3	-273	-3	24
4			60
5	-375	75	120
6			210
7	-357	273	336
8			
9	-171		

	$a^3 - 100a$	$b^3 - 10b$	$c^3 - c$
0			
1			
2	-192	-12	6
3			24
4	-336	24	60
5			120
6	-384	156	210
7			336
8	-288		
9			

Podobným způsobem (např. při uvážení dělitelnosti čtyřmi, pěti atd.) bychom dostávali stále méně kombinací, ale více tabulek. Dostali bychom ještě jedno číslo, a to 153. Při řešení se dalo postupovat také „hrubou silou", tedy tak, že po sestavení první tabulky stačilo odzkoušet všechny možnosti. Ale myslím si, že tento postup není hoden středoškoláka.

Trojciferná čísla splňující podmínku ze zadání jsou tedy tato: 153, 370, 371, 407.

6.5 Nechť A', B' jsou kolmé průměty bodů A, B do stěn BCD a ACD čtyřstěnu $ABCD$. Jestliže A' je ortocentrem $\triangle BCD$, pak B' je ortocentrem $\triangle ACD$. Dokažte.

Označme si B_1 jako patu výšky vedené z bodu B na stranu CD. AA' je kolmé na rovinu $BCD \implies ABA'$ je kolmé na BCD. Dále CD je kolmé na průsečnici ABA' a BCD (tedy na přímku BB_1), tedy CD je kolmé na ABA'. $AB_1 \subseteq ABA' \implies AB_1 \perp CD$. Víme, že AB_1 je kolmé na CD, BB_1 je kolmé na CD, tedy ABB_1 je kolmé na CD, tedy ABB_1 je kolmé ke každé rovině obsahující přímku CD, tedy i k rovině ACD. Protože ABB_1 je kolmé na ACD a AB_1 leží v rovině ACD, kolmý průmět ABB_1 do ACD je přímka AB_1, tedy B' náleží AB_1. Již jsme dokázali, že ABB_1 je kolmé na CD.

Analogicky se dokáže, že ADD_1 je kolmé na BC, tedy BC je kolmé na AD (D_1 je pata výšky vedené z bodu D na stranu BC). Nechť C_2 je pata výšky vedené z bodu C na stranu $AD \implies CC_2 \perp AD$. BC je kolmé na AD, CC_2 je kolmé na $AD \implies BCC_2 \perp AD \implies BCC_2$ je kolmé na každou rovinu, která obsahuje přímku AD, tedy i na rovinu $ACD \implies$ kolmý průmět roviny BCC_2 do roviny ACD je přímka $CC_2 \implies B' \in CC_2$.

Zjistili jsme, že B' leží na AB_1 a CC_2 (obě jsou výšky v $\triangle ACD$), B' je tedy ortocentrem trojúhelníku ACD.

6.6 Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost:

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

Platí:

$$1+\frac{1}{a_1} = 1+\frac{1}{na_1}+\ldots+\frac{1}{na_1} \geq (n+1)\cdot\sqrt[n+1]{\frac{1}{(na_1)^n}} \implies$$

$$\implies \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n\cdot\sqrt[n+1]{\frac{1}{(na_1)^n\cdot(na_2)^n\cdot\ldots\cdot(na_n)^n}}$$

Abychom dokázali nerovnost ze zadání, musíme ukázat, že

$$(n+1)^n\cdot\sqrt[n+1]{\frac{1}{(na_1)^n\cdot(na_2)^n\cdot\ldots\cdot(na_n)^n}} \geq (n+1)^n,$$

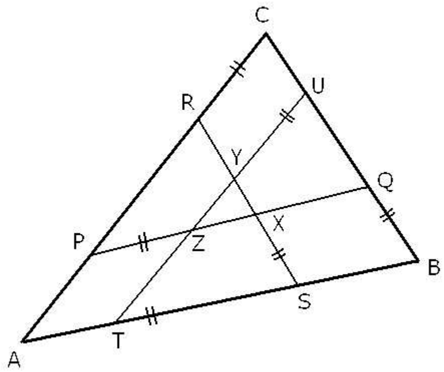
tedy

$$\sqrt[n+1]{\frac{1}{(na_1)^n\cdot(na_2)^n\cdot\ldots\cdot(na_n)^n}} \geq 1 \iff \frac{1}{(na_1)^n\cdot(na_2)^n\cdot\ldots\cdot(na_n)^n} \geq 1 \iff$$

$$\iff \left(\frac{1}{n}\right)^n \geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n \iff \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}} \iff \frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

Poslední nerovnost je známá AG nerovnost pro čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tím je úloha vyřešena.

6.7 V $\triangle ABC$ jsou příčky PQ, RS, TU rovnoběžné se stranami AB, BC, CA a protínají se v bodech X, Y, Z. Určete $S_{\triangle ABC}$, jestliže příčky PQ, RS, TU dělí $\triangle ABC$ na dvě části se stejným obsahem. Dále platí, že $S_{\triangle XYZ} = 1$.



$\triangle ABC \sim \triangle ASR$ (podle věty uu). Označme v_1, resp. v_2 výšku v $\triangle ABC$, resp. $\triangle ASR$ vedoucí z bodu A. Odpovídající si strany a výšky v těchto trojúhelnících budou ve stejném poměru, tedy $\frac{|BC|}{|SR|} = \frac{v_1}{v_2} = h$. Dále platí $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ASR}} =$ $= 2 = \frac{\frac{1}{2}|BC|v_1}{\frac{1}{2}|SR|v_2} = h^2 \implies h = \sqrt{2}$. Analogicky zjistíme, že i $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ a $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle TBU$ se shodným koeficientem podobnosti $h = \sqrt{2}$.

Z toho dostaneme $\sqrt{2}|AS| = |AB| = \sqrt{2}|TB| \implies |AS| = |TB| \implies$
$\implies |AS| - |TS| = |TB| - |TS| \implies |AT| = |SB|$. Dále platí $|AS| + |TB| = |AB| + |TS| \implies$
$\implies |TS| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} + \frac{|AB|}{\sqrt{2}} - |AB| \implies |TS| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{2} = (\sqrt{2}-1)|AB|$.

$|AT| + |SB| = |AB| - |TS| = |AB| \cdot (1 - \sqrt{2} + 1) = (2 - \sqrt{2})|AB| \implies |AT| = |BS| = \frac{2-\sqrt{2}}{2}|AB|$.

$ATZP$ a $SBQX$ jsou rovnoběžníky $\implies |PZ| = |AT| \wedge |XQ| = |SB|$.

Dále platí $\frac{|AB|}{\sqrt{2}} = |PQ| = |PZ| + |ZX| + |XQ| = |ZX| + 2|AB|\frac{2-\sqrt{2}}{2} = |ZX| + |AB|(2-\sqrt{2}) \implies$
$\implies |ZX| = |AB|(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \sqrt{2}) = |AB|\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

$\triangle ABC \sim \triangle ZXY$ (podle věty uu). Platí $|ZX| = |AB|\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$, AB a ZX jsou odpovídající si strany, koeficient podobnosti je tedy $h = \frac{|AB|}{|ZX|} = \frac{|AB|}{|AB|\frac{3\sqrt{2}-4}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}-4} = 3\sqrt{2}+4$. Výšky v obou nyní uvažovaných trojúhelnících jsou také ve stejném poměru, pro poměr obsahů tedy platí $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}} = (3\sqrt{2}+4)^2 \implies S_{\triangle ABC} = (3\sqrt{2}+4)^2 \cdot S_{\triangle XYZ} = (18 + 24\sqrt{2} + 16) \cdot 1 = 34 + 24\sqrt{2}$.

Obsah $\triangle ABC$ je tedy $34 + 24\sqrt{2}$.