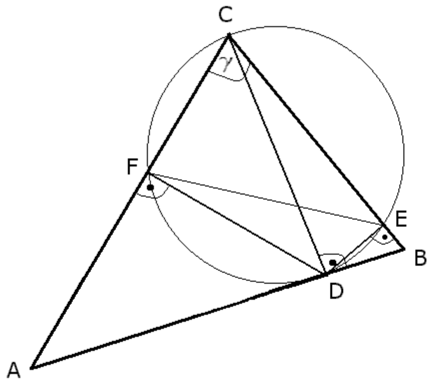
Vzorové řešení 5. série X. ročníku BRKOSu

5.1 Výška z vrcholu ostroúhlého trojúhelníka protíná protější stranu v bodě D. Z tohoto bodu jsou spuštěny kolmice DE a DF na obě zbylé strany trojúhelníka. Dokažte, že délka úsečky EF nezávisí na volbě vrcholu, z něhož je vedena výška.



Uvažujme kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $FDEC$. Tato kružnice je zároveň Thaletovou kružnicí nad průměrem CD, platí tedy $|EF| = |CD| \sin\gamma$ (γ je obvodový úhel příslušný kratšímu oblouku EF).

Ze vztahů pro obsah $\triangle$ plyne:

$$|CD| = \frac{2S}{|AB|}$$

$$\sin\gamma = \frac{2S}{|BC||AC|}$$

Z těchto vztahů získáme

$$|EF| = \frac{4S^2}{|AB||BC||AC|}$$

Zároveň platí vztah pro poloměr kružnice opsané $R = \frac{4S}{|AB||BC||AC|}$, tedy $|EF| = \frac{S}{R}$, délka EF tedy nezávisí na výběru vrcholu.

5.2 Učitel přichystal na zkoušku 8 různých otázek. Každému studentovi zadá 3 z nich. Kolik nejvíce studentů se může zkoušky zúčastnit, nechce-li učitel, aby někteří dva studenti měli více než jednu společnou otázku?

Nejprve ukážeme, že stejnou otázku mohou dostat maximálně 3 studenti.

Nějaký student dostane 3 otázky - označme si je 1, 2 a 3. Jiný student dostane otázku 1, ale pak musí mít nějaké 2 jiné otázky (např. 4 a 5), protože jinak by měl s prvním studentem společné nejméně dvě otázky. Stejně tak třetí student bude mít otázku 1 a dále 6 a 7. Kdyby další student měl otázku 1, musel by mít i otázku 8 a potom ještě nějakou z otázek 2 až 7, a to nelze, protože by měl s někým 2 stejné otázky.

Máme tedy 8 otázek, každou z nich mohou dostat maximálně 3 studenti, každý student dostane 3 otázky, tedy zkoušky se může zúčastnit maximálně 8 studentů.

Příklad rozdělení otázek mezi studenty:

student	otázky
1	1, 3, 4
2	1, 2, 7
3	1, 6, 8
4	2, 3, 8
5	2, 4, 5
6	3, 5, 6
7	4, 6, 7
8	5, 7, 8

5.3 Mějme mřížku 9×9 políček. Vyplníme ji čísly $1, 2, 3, \ldots, 81$ a spočítáme součty ve všech řádcích a sloupcích. Je možné vyplnit mřížku tak, aby počet všech lichých součtů byl roven počtu všech sudých součtů?

Protože nás zajímá pouze to, zda jsou součty čísel v tabulce liché nebo sudé, můžeme všechna čísla pro jednoduchost nahradit zbytky po dělení dvěma. Do tabulky tedy doplňujeme 41 jedniček a 40 nul.

Tabulku vyplníme například tak, že nejdříve do prvních 41 políček po řádcích dáme jedničky, do zbývajících nuly. Nyní máme 10 řádků a sloupců s lichým součtem. Zaměníme-li jedničku a nulu ležící ve stejném řádku (sloupci), součet tohoto řádku (sloupce) se nezmění a oba sloupce (řádky), ve kterých čísla leží, změní paritu. Uvažujeme-li liché součty, jejich počet se buď nezmění, nebo se změní o 2.

Je zřejmé, že každého rozestavení čísel v tabulce můžeme dosáhnout posloupností konečně mnoha takovýchto výměn, počet lichých součtů je tedy vždy sudý $\Longrightarrow$ nemůže jich být 9 $\Longrightarrow$ tabulku nelze vyplnit tak, aby počet všech lichých součtů byl roven počtu všech sudých součtů.

5.4 Máme čtverec o straně a. Sestrojte rovnostranný trojúhelník o stejném obsahu, jaký má daný čtverec.

Označme b stranu hledaného trojúhelníka. Ze vzorců vyjadřujících obsah čtverce a rovnostranného trojúhelníka máme

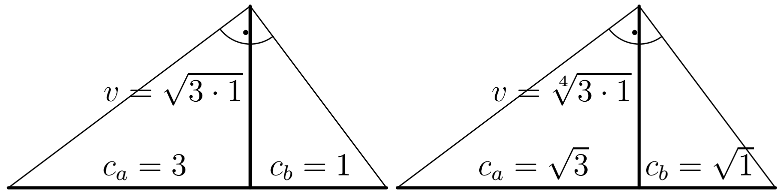
$$a^2 = b^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = b$$

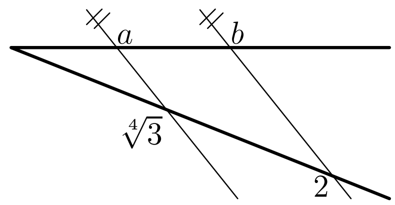
Řešení úlohy se sestrojí z této rovnice užitím stejnolehlosti (čtvrté geometrické úměrné) a Euklidovy věty o výšce. Hned na úvod poznamenejme, že postupů řešení je samozřejmě mnoho, už jen vezmeme-li namísto Euklidovy věty o výšce větu o odvěsně nebo větu Pythagorovu, dojdeme k témuž třemi různými cestami. Lišit se samozřejmě může i pořadí geometricky prováděných operací násobení, dělení a odmocňování.

Pomocí Euklidovy věty o výšce budeme odmocňovat, víme totiž, že pro výšku v ze strany naproti pravému úhlu a části této strany c_a, c_b rozdělené patou výšky v spuštěné z vrcholu při pravém úhlu platí $v^2 = c_a \cdot c_b$, neboli $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$. Pak již stačí vhodně požadovanou délku x

rozdělit jako součin, třeba $x \cdot 1$ a dosadit za c_a, c_b. Konkrétně v našem případě můžeme rozdělit $3 = 3 \cdot 1$ a získat lehce $\sqrt{3}$. Obdobně získáme i $\sqrt[4]{3}$ z $\sqrt{3}$.



Dělení a násobení se provede lehce čtvrtou geometrickou úměrnou, což je jen jiný název pro stejnolehlost užitou ke geometrickým „výpočtům“. Jak vše funguje je jasné z náčrtku.



$$\frac{a}{\sqrt[4]{3}} = \frac{b}{2}$$

Takto již tedy umíme získat úsečku délky b v požadovaném poměru k a. Sestrojit rovnostranný trojúhelník se stranou délky b je pak již jen věcí pevné ruky, fungujícího kružítka a rovného pravítka.

Na závěr snad jen poznamenejme, že číselné konstanty $(2, \sqrt{3})$ mají vždy význam jen proporcionální (poměrný), tedy je naprosto jedno, zvolíme-li za jednotku 1 cm, 1 m či cokoli jiného.

5.5 Pro různá $a, b, c \in \mathbb{R}$ a vhodné $p \in \mathbb{R}$ platí:

$$a(a^2 + p) = b(b^2 + p) = c(c^2 + p).$$

Dokažte, že $a + b + c = 0$.

Vyberme si jednu ze zadaných rovností:

$$a(a^2 + p) = b(b^2 + p)$$

$$a^3 - b^3 = -p(a - b)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = -p(a - b)$$

A protože ze zadání $a \neq b$, lze psát $a^2 + ab + b^2 = -p$. Obdobně dostaneme rovnost $b^2 + bc + c^2 = -p$. Ty můžeme od sebe odečíst:

$$b(c - a) + c^2 - a^2 = 0$$

$$(c - a)(b + c + a) = 0$$

A protože $c \neq a$ ze zadání, tak nutně $a + b + c = 0$, což bylo třeba dokázat.

5.6 Najděte posledních 6 cifer čísla

$$5^{6^{7^{8^{9^{10^{11^{12}}}}}}}$$

Postupně budeme dokazovat hodnoty posledních cifer.

Na místech jednotek a desítek jsou 5 a 2 (jinak zapsáno 25). To je celkem zřejmé, takže přenechávám k věření.

Na místě stovek se pravidelně střídají 6 a 1, což se dá zjistit po chvilce hraní s kalkulačkou. Pro sudou mocninu se objevuje 6, pro lichou 1. Mocnina v zadání je zřejmě sudá (sudé číslo na cokoliv je zase sudé číslo), takže na místě stovek bude 6.

Po dalším zkoušení zjistíme, že pro mocninu dělitelnou čtyřmi se na místě tisíců objevuje 0, pro mocninu dělitelnou 8 je desetitisícové číslo 9 a pro mocninu dělitelnou 16 máme opakující se cifru 8. Poslední šestičíslí by tedy mohlo být 890625.

Nyní dokážeme, že tomu tak doopravdy je. Využijeme k tomu mocného nástroje zvaného matematická indukce. Nejprve si číslo trochu upravíme.

$$5^{6^{7^{8^{9^{10^{11^{12}}}}}}} = 5^{2^{7^{8^{9^{10^{11^{12}}}}}} \cdot 3^{7^{8^{9^{10^{11^{12}}}}}}} = 5^{16m} = (5^{16})^m = 152587890625^m,$$

kde $m \in \mathbb{N}$ nějaké číslo.

Teď tedy nastoupí matematická indukce: Chceme dokázat, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí, že posledních 6 cifer čísla 152587890625^n je 890625.

1. $n = 1$: zřejmě platí
2. Předpokládejme, že to platí pro n, tedy že platí $152587890625^k = 10^6 \cdot l + 890625$ Pak pro $n + 1$ máme

$$152587890625^{n+1} = 152587890625^n \cdot 152587890625 = (10^6 \cdot k + 890625) \cdot (152587 \cdot 10^6 + 890625) =$$

$$= 10^6 \cdot (890625k + 152857 \cdot k \cdot 10^6 + 890625 \cdot 152587) + 890625 \cdot 890625 = 10^6 \cdot l + 793212890625 =$$

$$= 10^6 \cdot j + 890625$$

To, co jsme chtěli, jsme dokázali, můžeme tedy uzavřít s tím, že posledních 6 cifer je 890625.

5.7 Najděte všechna přirozená čísla n taková, že po odstranění posledních tří cifer získáme třetí odmocninu z n.

Zadání této úlohy je ekvivalentní s rovnicí $\left[\frac{n}{1000}\right] = \sqrt[3]{n}$, kde $n \in \mathbb{N} \wedge [x]$ značí nejbližší celé číslo, které je menší než x. Po odstranění posledních tří cifer z přirozeného čísla získáme přirozené číslo, takže $\sqrt[3]{n} \in \mathbb{N}$.

Platí $\left[\frac{n}{1000}\right] \leq \frac{n}{1000} < \left[\frac{n}{1000}\right] + 1$. Dostáváme tedy nerovnosti

$$\left[\frac{n}{1000}\right] \leq \frac{n}{1000} < \left[\frac{n}{1000}\right] + 1 \Longrightarrow \sqrt[3]{n} \leq \frac{n}{1000} < \sqrt[3]{n} + 1$$

Zavedeme substituci $\sqrt[3]{n} = p,\ p \in \mathbb{N}$

$$p \leq \frac{p^3}{1000} < p + 1$$

$$1000p \leq p^3 < 1000(p+1)$$

Musí tedy platit $p^3 - 1000p \geq 0 \wedge p^3 - 1000p - 1000 < 0$.

Řešením rovnic získáme $p > 31,6 \ \wedge \ p < 32,1 \Longrightarrow p = 32$.

Hledané číslo je tedy $32^3 = 32768$.