Vzorové řešení příkladů 4. série X. ročníku BRKOSu

4.1 Řešte v $\mathbb{Z}$:

$$xyz = x + y + z.$$

Nejdříve budeme uvažovat případ, kdy se jedna proměnná rovná nule.

1. Nechť $x = 0$. Pak získáme rovnici $0yz = 0 + y + z \Rightarrow y = -z$, čili $(x, y, z) = (0; t; -t), t \in \mathbb{Z}$ je libovolné.
2. Nechť $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$.
   (a) Nechť $x = y$. Získáme rovnici $x^2z = 2x + z \Rightarrow zx^2 - 2x - z = 0 \Rightarrow D = 4 + 4z^2 = = 4(1 + z^2)$, kde D je diskriminant získané kvadratické rovnice. Je vidět, že za daných předpokladů je jeho odmocnina iracionální, takže nezískáváme žádné řešení.
   (b) BÚNO předpokládejme, že $x > y > z$. Rozlišíme 4 případy:
      i. $x > y > z > 0$. Pomocí této nerovnosti získáme odhad $3x > x + y + z = xyz \Rightarrow \Rightarrow yz < 3$. Předpokladům vyhovuje jediná možnost, a to $y = 2 \wedge z = 1 \Rightarrow x = 3$. Tím jsme získali řešení $(x, y, z) = (3; 2; 1)$.
      ii. $x > y > 0 > z$. Opět získáme odhad $3z < x + y + z = xyz \Rightarrow xy < 3$. Stejně jako v předchozím případě máme $x = 2 \wedge y = 1 \Rightarrow z = 3$ - spor s předpokladem.
      iii. $x > 0 > y > z$. Máme odhad $3x > x + y + z = xyz \Rightarrow yz < 3$. Vyhovuje jediná možnost, a to $y = -1 \wedge z = -2 \Rightarrow x = -3$ - spor s předpokladem.
      iv. $0 > x > y > z$. Zavedeme substituci $x = -a, y = -b, z = -c$. Tímto se nám rovnice převede na případ i., takže řešením je $(x, y, z) = (-1, -2, -3)$.

Vyšla celkově 3 řešení, ostatní získáme záměnami jednotlivých čísel. Řešení je tedy
$(x, y, z) \in \{(0; t; -t), (t; 0; -t), (t; -t; 0), (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1), (-1; -2; -3), (-1; -3; -2), (-2; -1; -3), (-2; -3; -1), (-3; -1; -2), (-3; -2; -1)\}$.

4.2 Dokažte:

$$112 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1.$$

Abychom dokázali dělitelnost číslem 112, stačí dokázat dělitelnost čísly 16 a 7, protože $\mathcal{D}(16, 7) = 1 \wedge 112 = 16 \cdot 7$

1. $16 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1$
   $(835^5 + 6)^{18} - 1 = ((16 \cdot 52 + 3)^5 + 6)^{18} - 1 = (16k + 3^5 + 6)^{18} - 1 = (16k + 240 + 9)^{18} - 1 =$
   $= 16l + 9^{18} - 1 = 16l + 81^9 - 1 = 16l + (80 + 1)^9 - 1 = 16l + 80m + 1 - 1 = 16l + 5 \cdot 16m =$
   $= 16n \Rightarrow 16 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1$
2. $7 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1$
   $(835^5 + 6)^{18} - 1 = ((7 \cdot 119 + 2)^5 + 6)^{18} - 1 = (7k + 35 + 3)^{18} - 1 = (7l + 3)^{18} - 1 =$
   $= 7m + 3^{18} - 1 = 7m + 9^9 - 1 = 7m + (7 + 2)^9 - 1 = 7m + 7n + 2^9 - 1 =$
   $= 7(m + n) + 8^3 = 7(m + n) + (7 + 1)^3 - 1 = 7(m + n + o) + 1 - 1 \Rightarrow 7 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1$

Nyní jsme dokázali, že $16 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1 \wedge 7 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1 \Rightarrow 112 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1$

4.3 Posloupnost reálných čísel $s_0, s_1, s_2, \ldots$ má následující vlastnosti:

1. $s_i s_j = s_{i+j} + s_{i-j}$ pro všechna nezáporná celá i a j, $i \geq j$
2. $s_i = s_{i+12}$ pro všechna nezáporná celá i
3. $s_0 > s_1 > s_2 > 0$.

Určete tedy čísla s_0, s_1, s_2.

Nejprve volbou $i = j = 0$ určíme hodnotu s_0: $s_0 s_0 = s_0 + s_0 \Rightarrow s_0^2 = 2s_0$. Víme, že $s_0 > 0$, tedy $s_0 = 2$. Nyní se pokusíme najít s_4: Volbou $i = j = 4$ a $i = 8, j = 4$ dostaneme dvě rovnice:

$$s_4 s_4 = s_8 + s_0 = s_8 + 2 \Rightarrow s_8 = s_4^2 - 2 \tag{1}$$

$$s_8 s_4 = s_{12} + s_4 = s_0 + s_4 = s_4 + 2 \tag{2}$$

Dosazením (1) do (2) dostaneme $(s_4^2 - 2)s_4 = s_4 + 2 \Rightarrow s_4^3 - 3s_4 - 2 = 0$. Snadno se dá uhodnout kořen -1 a po vydělení rovnice členem $s_4 + 1$ dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž řešení je snadné. Nakonec vyjdou dva různé kořeny: $s_{4_1} = 2$ a $s_{4_1} = -1$ (dvojnásobný kořen).

Pokud nyní zvolíme $i = j = 2$, dostaneme rovnici $s_2 s_2 = s_4 + 2$. Pokud $s_4 = 2$, dostaneme $s_2^2 = 4 \Rightarrow s_{2_1} = 2$ (spor s tím, že $s_0 > s_2$) nebo $s_{2_2} =_2$ (spor s nerovností $s_2 > 0$). Tedy dostáváme $s_4 = -1$. Potom $s_2^2 = 1 \Rightarrow s_2 = 1$ ($s_2 = -1$ odporuje zadání).

Po volbě $i = j = 1$ dostaneme také s_1: $s_1 s_1 = s_2 + s_0 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow s_1 = \sqrt{3}$. Úloha má tedy jedno řešení: $s_0 = 2, s_1 = \sqrt{3}, s_2 = 1$.

4.4 Do následující tabulky lze zapsat osm z devíti následujících čísel: 2,3,4,7,10,11,12,13,15 tak, že aritmetický průměr čísel ve všech řádcích i sloupcích je stejné přirozené číslo. Najděte všechna taková rozestavení.

1			
	9		5
		14	

1	a_1	a_2	a_3
a_4	9	a_5	5
a_6	a_7	14	a_8

Neznámý aritmetický průměr si označíme jako $x, x \in \mathbb{N}$.
Platí: $\frac{1+a_1+a_2+a_3}{4} = \frac{a_4+9+a_5+5}{4} = \frac{a_6+a_7+14+a_8}{4} = x$, tedy $\frac{1+9+14+5+a_1+\ldots+a_8}{4} = 3x \Rightarrow 1 + 9 + 14 + 5 + a_1 + \ldots + a_8 = 12x$
Tedy mmáme, že součet dvanácti čísel v tabulce bude dělitelný číslem 12. Součet všech 13 čísel, které máme k dispozici, je $106 = 96 + 10 = 12 \cdot 8 + 10 \Rightarrow$ v tabulce nebude číslo 10. Uvažujme nyní 3. sloupec: $a_2 + a_5 + 14 = 3x = 24 \Rightarrow a_2 + a_5 = 10$. Ze zadání máme jedinou možnost: $\{a_2, a_5\} = \{3, 7\}$. Pokud $a_5 = 3$, potom $a_4 = 32 - 5 - 9 - 3 = 15 \Rightarrow a_6 = 24 - 15 - 1 = 8$ - spor (číslo 8 není na výběr). Potom tedy musí být $a_5 = 7$ a $a_2 = 3$.
Dále $a_4 = 32-9-7-5 = 11$, $a_6 = 24-11-1 = 12$. $a_7+a_8 = 32-14-12 = 6 \Rightarrow \{a_7, a_8\} = \{4, 2\}$ $a_7 + a_1 = 24 - 9 = 15$, jediná vhodná volná čísla jsou 2 a 13, tedy $a_7 = 2 \Rightarrow a_8 = 4, a_1 = 13, a_3 = 15$.
Řešení úlohy je

1	13	3	15
11	9	7	5
12	2	14	4

4.5 Dokažte, že existuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel a, b, c tak, že $\mathcal{D}(a, b, c) = 1$ a součet $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

Stačí zvolit $a = 2, b = q, c = q^2$, kde q je liché číslo. Potom zřejmě $\mathcal{D}(a, b, c) = 1$.
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = 4q^2+4q^4+q^6 = q^2\cdot(q^4+4q^2+4) = q^2\cdot(q^2+2)^2 = [q(q^2+2)]^2$. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ je tedy druhou mocninou přirozeného čísla.
Ještě zde pro zajímavost uvedu další řešení, na která přišli řešitelé BRKOSu:
Jan Uhlík a Jaroslav Hančl přišli na řešení $a = 1, b = x, c = x + 1, x \in \mathbb{N}$.
Pak $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (x^2 + x + 1)^2$.
Alexandr Pícha přišel na jiné řešení: $a = 2k^2, b = k, c = 1$. Daný součet pak bude $[k(2k^2 + 1)]^2$.

4.6 Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že pro každé $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ existuje číslo tvaru $10a + b$ ($a \in \mathbb{N}_0$), které je dělitelem n.

Budeme postupně budovat hledané číslo jako součin prvočísel. Probereme jednotlivé číslice z $0, \ldots, 9$ a pro každou z nich do rozvoje přidáme tolik prvočísel a jejich mocnin, aby výsledné číslo dané budovaným rozkladem bylo dělitelné součtem dotyčné číslice a nějakého násobku deseti. Zároveň ověříme, že nemůžeme přidat jiné součinitele do rozkladu tak, aby opět splňoval výše zmíněnou vlastnost a navíc bylo číslo jím reprezentované menší než to, které jsme získali jako součin našeho rozkladu.

Pro 0 je jasné, že v rozkladu musí být $10 = 2 \cdot 5$, neboť nějaké číslo ve tvaru $a \cdot 10 + 0$ musí být dělitelem n, 0 to být nemůže, neboť pak by $n = 0 \notin \mathbb{N}$ a pro $a > 0$ je jedině $a = 1$ nejmenší možné (neboť pro $a > 1$ platí $10 \mid (a \cdot 10 + 0$, a tudíž rozšíření našeho budovaného rozkladu o součinitele nutné pro dělitelnost číslem $a \cdot 10 + 0$ nevytvoří rozklad menšího čísla, než při $a = 1$). Tím jsme ovšem také zajistili, že výsledné číslo bude dělitelné čísly $0 \cdot 10 + 5$ a $0 \cdot 10 + 2$, aniž bychom pro ně museli do rozkladu cokoli přidat. Rovněž pro číslo $0 \cdot 10 + 1$ netřeba ničeho přidávat, protože 1 dělí každé celé číslo a tudíž nemusíme rozklad o nic obohacovat (což by neplatilo v případě $a \neq 0$, proto je toto nejlepší číslo ve tvaru $a \cdot 10 + 1$, které můžeme chtít jako dělitel výsledného čísla). Pro zbylá čísla si vytvoříme tabulku, v níž spočteme několik možných hodnot výrazu $a \cdot 10 + b$, kde b je dané číslo, abychom viděli, jaké součinitele bychom museli přidat do budovaného rozkladu, aby číslo jím reprezentované mělo mezi děliteli číslo s cifrou b na místě jednotek. Vypíšeme vždy jen několik prvních hodnot, to, že mezi dalšími bychom již čísla budující rozklad menší než náš nenašli, zdůvodníme nakonec.

$3 \to 3, 13, 23, 43, 53, 63 = 3^2 \cdot 7, 73, 83, 93 \ldots$
$4 \to 4 = 2^2, 14 = 2 \cdot 7, 24 = 2^3 \cdot 3, 34 = 2 \cdot 17, 44 = 2^2 \cdot 11, 54 = 3^3 \cdot 2 \ldots$
$6 \to 6 = 2 \cdot 3, 16 = 2^4, 26 = 2 \cdot 13, 36 = 2^2 \cdot 3^2, 46 = 2 \cdot 23, 56 = 7 \cdot 2^3 \ldots$
$7 \to 7, 17, 27 = 3^3, 37, 47, 57, 67, 77 = 11 \cdot 7, 87, 97 \ldots$
$8 \to 8 = 2^3, 18 = 2 \cdot 3^2, 28 = 2^2 \cdot 7, 38 = 2 \cdot 19, 48 = 2^4 \cdot 3, 58 = 2 \cdot 29 \ldots$
$9 \to 9 = 3^2, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99 = 3^2 \cdot 11 \ldots$

Naším úkolem je teď z této tabulky vybrat takový součin prvočísel, že jejich přítomnost v budovaném rozkladu zajistí zadáním požadovanou dělitelnost z tohoto rozkladu vzniklého čísla (tedy bude se tento součin vyskytovat v každém řádku tabulky) a zároveň to bude nejmenší takový součin. V rozkladu již máme čísla 2 a 5, na ty můžeme při vybírání jakoby zapomenout (tj. můžeme je vybrat, ale nezapočítáváme je do velikosti vybraného součinu při porovnávání velikosti dvou vybraných součinů.

Zkoumejme třeba součin (mocninu) 3^3. Ta se dá najít v každém řádku (popřípadě doplněná o 2 – viz výše), lépe řečeno dá se v každém řádku najít taková mocnina 3, že je nejvýše třetí. Zamysleme se teď, jaké jiné prvočíslo než 3 bychom mohli vybrat z prvního řádku, aby vybraný součin nebyl větší, než $3^3 = 27$. V úvahu připadají 13 a 23, jež jsou menší, než 27, ovšem už o řádek níže by si tato prvočísla vynutila přidání dalších do součinu tak, že by byl větší, než 27 – tedy první mocninu 3 hledaný součin obsahovat musí. Jiné součinitele již na prvním řádku nemá smysl hledat, protože tu žádní jiní menší než 27 nejsou (a 2 a 5 nemá cenu brát v potaz, protože žádný násobek ani jednoho z nich nekončí 3 v jednotkách). Zároveň je dobré si uvědomit, že číslo $3^3 \cdot 2 \cdot 5 = 270$, které jsme již našli, splňuje dělitelnost požadovanou v zadání, takže nám stačí ověřovat, že nenajdeme číslo menší s toutéž vlastností, tedy již máme rozvoje řádků tabulky omezeny právě číslem 270. Dále řádek se sedmičkou nám nabídne jedinou možnost, jak vybrat součin takový, aby obsahoval 3 a zároveň dával číslo dělitelné jiným, které by končilo cifrou 7 v jednotkách a zároveň by přidání takového součinu do výsledného rozkladu nezpůsobilo, že by tento rozklad byl větší, než 270. Touto možností je právě 3^3. Tím máme zaručeno, že číslo $3^3 \cdot 2 \cdot 5 = 270$ splňuje dělitelnost ze zadání a zároveň je mezi přirozenými nejmenší takové, je tedy hledaným řešením. Další řádky již testovat nemusíme.

4.7 Milan zná následující test na dělitelnost číslem 19: škrtne poslední číslici čísla a k vzniklému číslu přičte 2-násobek škrtnuté číslice. Tento postup opakuje, dokud nedostane šíslo menší než 20. Původní číslo je dělitelné 19 $\Leftrightarrow$ výsledné číslo je rovněž dělitelné 19. Poraďte Milanovi obdobný test na dělitenost 29 a dokažte jeho správnost.

Jestliže máme najít obdobný test, budeme postupovat obdobně. Jako testovací číslo si vezmeme 29. Po odtrhnutí poslední cifry zbyde číslo 2. K němu máme přičíst nějaký n-násobek čísla 9 a měli bychom dostat opět 29. Je vidět, že požadované n je číslo 3, takže postup by mohl být následující: škrtneme poslední číslici čísla a k vzniklému číslu přičteme 3-násobek škrtnuté číslice. Tento postup opakujeme, dokud nedostaneme číslo menší než 30. Pokud je výsledné číslo 29, původní číslo je dělitelné 29. A nyní důkaz této hypotézy.
K důkazu využijeme pomocné věty:
Nechť $x, y, z \in \mathbb{N}$ taková, že $\mathcal{D}(x, y) = 1$. Pak $x \mid yz \Leftrightarrow x \mid z$.

A nyní již samotný důkaz: nechť $n = 100a + 10b + c$, kde $a \in \mathbb{N}_0, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Pak

$$29 \mid (100a + 10b + c) \Leftrightarrow 29 \mid 3(100a + 10b + c) \Leftrightarrow 29 \mid (300a + 30b + 3c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29 \mid (290a + 29b + 10a + b + 3c) \Leftrightarrow 29 \mid [29(10a + b) + 10a + b + 3c] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29 \mid (10a + b + 3c)$$

Důkaz máme hotov, dospěli jsme k tomu, k čemu jsme chtěli. Výraz $10a + b + 3c$ totiž znamená číslo, které vznikne odtržení poslední cifry c a přičtení jejího trojnásobku k vzniklému číslu.