Vzorové řešení příkladů 3. série X. ročníku BRKOSu

3.1 Lukáš si našel o prázdninách brigádu. Pomáhal při stavbě rodinného domku pana Boucníka, který nabídl následující dohodu: „*Budeš-li u mě pracovat n dní, za každý den si vyděláš $\frac{n-i}{i(i+1)(i+2)} \cdot 1000$ Kč, kde i je pořadí dne, který u mně budeš pracovat.*“ Lukáš souhlasil a dal se do práce. Jednoho dne večer, přesně po n dnech práce, se vracel z brigády. Byl unaven, a proto jeho reakce nebyly nejrychlejší. Zaregistroval slupku od banánu, ale svoje kroky už nestihl upravit. Nastal náhlý konec práce a pan Boucník musel Lukášovi vyplatit dohodnutou mzdu. Dokažte, že celková odměna byla $\frac{n(n-1)}{4(n+1)} \cdot 1000$ Kč.

Ze zadání vyplývá, že máme dokázat rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n-1)}{4(n+1)}.$$

Použijeme matematickou indukci podle n. Nejprve dokážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$. Po dosazení dostáváme, že $0 = 0$. Tedy předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$. Označme nyní

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{i(i+1)(i+2)}, \quad s_n' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}, \quad s_n'' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)},$$

kde s_n označuje sumu peněz vydělanou Lukášem za n dní (levá strana dokazované rovnosti). Tedy

$$s_n = n \cdot s_n' - s_n'', \quad s_{n-1} = (n-1) \cdot s_{n-1}' - s_{n-1}''.$$

Dále

$$s_n' = s_{n-1}' + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad s_n'' = s_{n-1}'' + \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

z toho

$$s_n = n\cdot\left(s_{n-1}' + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right) - \left(s_{n-1}'' + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = (n-1)\cdot s_{n-1}' - s_{n-1}'' + s_{n-1}' = s_{n-1} + s_{n-1}'.$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2i} - \frac{1}{i+1} + \frac{1}{2(i+2)},$$

potom

$$s_{n-1}' = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{i+1} + \frac{1}{2(i+2)}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2(i+2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{2i}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n-2} \frac{1}{i+1} + \frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{2(i+2)} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{i=3}^{n} \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{i} + \frac{1}{2i}\right) = \frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}.$$

Podle tohoto vzorce a indukčního předpokladu získáme

$$s_n = \frac{(n-1)(n-2)}{4n} + \frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)} = \frac{n(n-1)}{4(n+1)},$$

což je zároveň pravá strana dokazované rovnosti. Tím jsme tedy tvrzení dokázali.

3.2 Určete hodnotu součtu

$$S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2002^2}+\frac{1}{2003^2}}.$$

Nechť

$$a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n,$$

pak

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{(n+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^2+\frac{1}{n^2}+2n+\frac{2}{n}+3}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-2+2\left(n+\frac{1}{n}\right)+3}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{n}\right)+1}{(n+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(n+\frac{1}{n}+1)^2}{(n+1)^2}} = \frac{n+\frac{1}{n}+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Úpravy jsou ekvivalentní, neboť pro $n \in \mathbb{N}$ jsou čitatel i jmenovatel kladné výrazy. K poslední rovnosti jsme došli rozkladem na parciální zlomky.

Dosaďme do s_n :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{1} + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= n+1+0-\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Podle zadání jsme měli spočítat s_{2002} :

$$s_{2002} = \frac{2002 \cdot 2004}{2003}.$$

To, že vyjde číslo blízké 2003, není třeba počítat, vyjádření racionálního čísla zlomkem je přirozenější a navíc vždy přesné.

3.3 Dokažte, že pro všechna $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x \cdot \cos^6 x} \geq 80.$$

Podle AG nerovnosti dostáváme

$$\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^6 x \cdot \cos^6 x}} = \frac{2}{\sin^3 x \cdot \cos^3 x}.$$

Dále platí $2\sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. Pomocí předchozích vztahů dostáváme

$$\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x \cdot \cos^6 x} \geq \frac{2}{\sin^3 x \cdot \cos^3 x} + \frac{1}{\sin^6 x \cdot \cos^6 x} = \frac{2}{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^6} =$$

$$= \frac{16}{\sin^3 2x} + \frac{64}{\sin^6 2x} \geq 16 + 64 = 80$$

Všechny výrazy i úpravy mají smysl, protože $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tedy $\cos x \in (0;1)$, $\sin x \in (0;1)$. Tvrzení je tedy dokázáno.

3.4 V trojúhelníku ABC jsou dány strany $|AB| = 8, |BC| = 13, |AC| = 15$. Dokažte, že na straně AC existuje bod D tak, že vzdálenosti $|AD|$ a $|BD|$ jsou přirozená čísla.

Nejprve si vypočteme velikost úhlu α z kosinové věty pro stranu BC:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AB||AC|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{15^2 + 8^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = \frac{120}{240} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Pokud zvolíme bod D tak, že $|AD| = 8$, máme $\triangle ABD$, který je rovnoramenný ($|AD| = |AB|$) a úhel u hlavního vrcholu má $60°$, $\triangle ABD$ je tedy rovnostranný $\Rightarrow |BD| = 8$. Našli jsme tedy bod D s danou vlastností.

3.5 Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\frac{36}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{y}} = 42 - 9\sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Nejdříve upravíme rovnici:

$$9\left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{y} + \frac{9}{\sqrt{y}} = 42$$

Z AG nerovnosti

$$\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4$$

a také

$$\sqrt{y} + \frac{9}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\sqrt{y} \cdot \frac{9}{\sqrt{y}}} = 6.$$

Platí tedy

$$9\left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{y} + \frac{9}{\sqrt{y}} \geq 9 \cdot 4 + 6 = 42.$$

Aby rovnice měla nějaké řešení, musí v obou AG nerovnostech nastat rovnost, proto

$$\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \text{ a } \sqrt{y} = \frac{9}{\sqrt{y}}.$$

Odtud snadno dostaneme $x = 4$ a $y = 9$, což je jediné řešení rovnice.

3.6 Dokažte, že platí následující rovnost:

$$\ln\left(\lim_{z\to\infty}\left(0! + \frac{1}{z}\right)^z\right) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha}{2^n}.$$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}$ a $\mathrm{tg}^2\alpha$ nejsou definovány pro $\alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$. Pro tyto hodnoty α rovnost neplatí, pro ostatní se to pokusíme dokázat.

$0! = 1$, $\lim\limits_{z\to\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \mathrm{e}$ (definice čísla e), $\ln \mathrm{e} = 1$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (goniometrická jednička)

$\Rightarrow \ln\left(\lim\limits_{z\to\infty} \left(0! + \frac{1}{z}\right)^z\right) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$

$P = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

$\frac{1}{2}P = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \Rightarrow P - \frac{1}{2}P = 1 \Rightarrow P = 2.$

Obě strany se rovnají 2, rovnost tedy platí.

3.7 Je dána kružnice a bod A mimo ni. Nechť AB a AC jsou tečny této kružnice (B a C jsou body dotyku). Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na dané kružnici.

Označme O střed kružnice vepsané $\triangle ABC$, S střed dané kružnice, X patu kolmice spuštěné z O na AB, $Y = SA \cap CB$. Pak $|\angle AOX| = |\angle ASB| = 90° - \alpha/2$. Dále $\triangle BOX \cong \triangle BOY$ podle věty Ssu, tedy $|\angle BOX| = |\angle BOY| \Rightarrow |\angle BOY| = (180° - |\angle AOX|)/2 = 45° + \alpha/4$.
Nyní $|\angle SBO| = 180° - |\angle ASB| - |\angle BOY| = 45° + \alpha/4$. Tedy $\triangle BSO$ je rovnoramenný se základnou $BO \Rightarrow |SB| = |SO| \Rightarrow O \in k(S; |SB|)$.