Vzorové řešení příkladů 2. série X. ročníku BRKOSu

2.1 Určete všechna reálná čísla a, pro která platí

$$\left[\frac{1}{2}a\right] + \left[\frac{1}{3}a\right] + \left[\frac{1}{5}a\right] = a.$$

Protože na levé straně je součet celých čísel, musí být i na pravé straně celé číslo, tedy a je celé číslo. Každé celé číslo a si můžeme napsat jako $a = 30x + y$, kde $x \in \mathbb{Z}, y \in \{0, 1, \dots, 29\}$. Každé celé a je tedy určeno jednoznačně. Dosadíme:

$$\begin{aligned}\left[\frac{30x+y}{2}\right] + \left[\frac{30x+y}{3}\right] + \left[\frac{30x+y}{5}\right] &= 30x + y \\ \left[15x + \frac{y}{2}\right] + \left[10x + \frac{y}{3}\right] + \left[6x + \frac{y}{5}\right] &= 30x + y.\end{aligned}$$

Protože $15x, 10x$ i $6x$ jsou celá, dostáváme:

$$\begin{aligned}15x + \left[\frac{y}{2}\right] + 10x + \left[\frac{y}{3}\right] + 6x + \left[\frac{y}{5}\right] &= 30x + y \\ x &= y - \left[\frac{y}{2}\right] - \left[\frac{y}{3}\right] - \left[\frac{y}{5}\right].\end{aligned}$$

Nyní stačí dosazovat za y všechny přípustné hodnoty, tj. $y = 0, y = 1, \dots, y = 29$ a tím z poslední rovnice dostaneme hodnoty x pro dané y a tedy i všechna možná řešení $a = 30x + y$ vyhovující zadání.

Všechna řešení jsou tedy tato: $a \in \{0, 6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 47, 49, 53, 59\}$.

2.2 Jestliže a, b, c jsou strany trojúhelníka, pak platí:

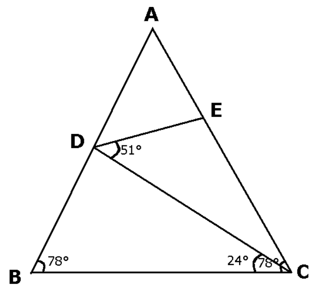
$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 3.$$

Dokažte.

Bohužel se nám do zadání vloudila chybička, takže vyřešit tento příklad bylo velmi jednoduché. Stačí si vzít například rovnostranný trojúhelník se stranou o délce 1. Pak výraz uprostřed nabývá hodnoty 9, což je samozřejmě větší než 3, takže uvedená nerovnost neplatí.

2.3 Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. V něm $|\angle ABC| = |\angle ACB| = 78^\circ$. Nechť D a E jsou body na stranách AB a AC tak, že $|\angle BCD| = 24^\circ$ a $|\angle CDE| = 51^\circ$. Určete velikost úhlu BED.

Nejdříve si nakreslíme obrázek.



Snadno si dopočítáme další úhly:
$|\angle BDC| = 78^\circ, |\angle DCE| = 54^\circ, |\angle DEC| = 75^\circ$. Nyní si vyjádříme některé strany ze sinové a kosinové věty (BÚNO předpokládejme, že délka základny je rovna 1):

$$
\begin{aligned}
|BD| &= \frac{\sin 24^\circ}{\sin 78^\circ} && (1)\\
|DE| &= \frac{\sin 54^\circ}{\sin 75^\circ} && (2)\\
|BE|^2 &= |BD|^2 + |DE|^2 - 2|BD||DE|\cos 129^\circ && (3)\\
\sin\alpha &= \frac{|BD|\sin 129^\circ}{|BE|} && (4)
\end{aligned}
$$

Nyní podosazujeme z jednotlivých vztahů a dostáváme:

$$\sin\alpha = \frac{|BD|\sin 129^\circ}{|BE|} = \frac{\sin 24^\circ \sin 129^\circ}{\sin 78^\circ\sqrt{\frac{\sin^2 24^\circ}{\sin^2 78^\circ} + \frac{\sin^2 54^\circ}{\sin^2 75^\circ} - 2\frac{\sin 24^\circ \sin 54^\circ \cos 129^\circ}{\sin 78^\circ \sin 75^\circ}}} \Rightarrow \alpha = 16^\circ 22' 56"$$

2.4 Dokažte, že platí:

$$\cot 10^\circ \tan 20^\circ \cot 30^\circ \tan 40^\circ = 3.$$

Nejprve využijeme vztahu $\cot\alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$. Tím se zadání upraví do tvaru $\tan 80^\circ \tan 20^\circ \tan 60^\circ \tan 40^\circ = 3$. Nyní použijeme vztah pro součet argumentů funkce tangens:

$$\tan 40^\circ \tan 80^\circ = \tan(60^\circ - 20^\circ)\tan(60^\circ + 20^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 20^\circ}\frac{\tan 60^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 20^\circ} =$$

$$= \frac{3 - \tan^2 20^\circ}{1 - 3\tan^2 20^\circ}.$$

Z výsledku dostáváme:

$$\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \tan 20^\circ \frac{3 - \tan^2 20^\circ}{1 - 3\tan^2 20^\circ} = \frac{3\tan 20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1 - 3\tan^2 20^\circ},$$

což, jak je níže dokázáno, je vztah pro trojnásobný argument funkce tangens. Platí totiž

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\alpha}{1 - \tan\alpha\tan 2\alpha} = \frac{\tan\alpha + \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1 - \tan\alpha\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}.$$

Máme tedy

$$\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ = \tan 60^\circ \tan 60^\circ = 3.$$

2.5 Řešte v $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2003}.$$

Rovnici si upravíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{2003}\\ 2003(x+y) &= xy\\ x+y &= \frac{xy}{2003}\end{aligned}$$

Musíme si uvědomit, že 2003 je prvočíslo, takže jedno z čísel x, y je násobkem 2003. Rovnice je symetrická, zvolme tedy $x = 2003k$. Tím dostáváme:

$$\begin{aligned}2003k+y &= ky\\ y(k-1) &= 2003k\\ y &= \frac{2003k}{k-1}\end{aligned}$$

Protože $y \in \mathbb{N}$, musí $k-1$ dělit $2003k$. Protože k a $k-1$ jsou nesoudělná pro $k>1$, mohou nastat jen tyto případy:

1. $k-1=2003$
2. $k-1=1$

Pro první případ dostáváme: $x = 2003 \cdot 2004 = 4014012 \quad y = 2004$.
Pro druhý případ dostáváme: $x = 2003 \cdot 2 = 4006 \quad y = 4006$.
Tento příklad má tedy 3 řešení: $[x, y] \in \{[4006, 4006]; [4014012, 2004]; [2004, 4014012]\}$

2.6 Určete, kterým pětistěnům lze opsat kouli.

Podle Eulerovy věty o mnohostěnech platí $s+v=h+2$, kde s je počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran. V našem případě dostáváme $5+v=h+2 \Rightarrow v+3=h$. Pětistěn se může skládat jen ze čtyřúhelníků a trojúhelníků (důkaz je zřejmý). Nechť se pětistěn skládá z u trojúhelníků a $5-u$ čtyřúhelníků. Potom počet hran je $h=\frac{3u+4(5-u)}{2}=\frac{20-u}{2}$. Dostáváme 3 možnosti:

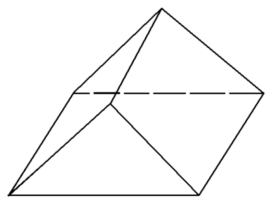
1. $u=0 \Rightarrow v+3=10 \Rightarrow v=7$
2. $u=2 \Rightarrow v+3=9 \Rightarrow v=6$
3. $u=4 \Rightarrow v+3=8 \Rightarrow v=5$

1. 5 čtyřúhelníků, 7 vrcholů, 10 hran.
   Podstavou bude určitě čtyřúhelník. Máme 4 vrcholy pětistěnu. Zbývají ještě 3 další, které neleží v rovině podstavy a leží v jednom z dvou poloprostorů určených rovinou podstavy. Spojnice těchto tří bodů tvoří trojúhelník, který je zároveň jednou ze stěn pětistěnu, což je spor s předpokladem, že stěny jsou jen čtyřúhelníky.
2. 2 trojúhelníky, 3 čtyřúhelníky, 6 vrcholů, 9 hran.

   (a) 3 čtyřúhelníky mají společný vrchol.
   Když uvážíme podobu takového útvaru, docházíme ke sporu. Takový útvar by měl 7 vrcholů, a to 1 společný třem čtyřúhelníkům, 3 vrcholy společné 2 čtyřúhelníkům a 3 vrcholy samostatné pro každý čtyřúhelník.

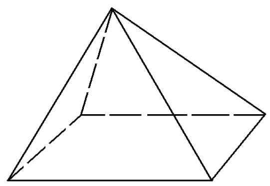
(b) 2 trojúhelníky mají společný vrchol.
V tomto případě existuje vrchol, který není obsažen v žádném z těchto trojúhelníků, což znamená, že náleží 3 čtyřúhelníkům. Už z předchozího je vidět, že taková možnost nemůže nastat.

(c) Podoba stanu.



Aby tomuto pětistěnu šla opsat koule, musí se skládat ze 3 tětivových čtyřúhelníků. Střed koule leží na přímce kolmé k rovině čtyřúhelníka procházející středem kružnice opsané tomuto čtyřúhelníku. Vezmeme-li sousední čtyřúhelník a obdobně sestrojíme kolmici, protne se s první přímkou, protože obě leží v rovině kolmé na společnou hranu čtyřúhelníků. Průsečík těchto dvou přímek je střed koule. Všech 6 vrcholů pětistěnu tedy leží na kouli.

3. 4 trojúhelníky, 1 čtyřúhelník, 5 vrcholů, 8 hran.

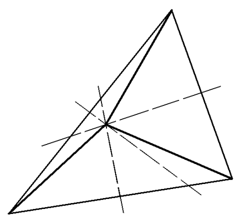


Podstavou bude tětivový čtyřúhelník a pátý vrchol bude libovolný. Střed koule leží na přímce kolmé k podstavě procházející středem kružnice opsané čtyřúhelníku. Střed koule zároveň leží na kolmici k rovině jednoho z trojúhelníků, která prochází středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Jako v předchozím případě se obě přímky protínají, takže střed koule existuje. Všech 5 vrcholů leží tedy na kouli.

2.7 Dokažte, že libovolný ostroúhlý trojúhelník lze rozdělit alespoň třemi různými způsoby třemi úsečkami na tři části tak, aby každá část byla osově souměrná.

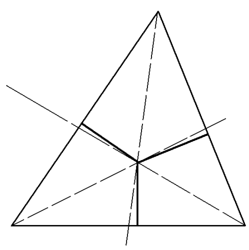
Dokázat, že trojúhelník lze alespoň třemi způsoby rozdělit třemi úsečkami na 3 osově souměrné části můžeme nejsnáze tak, že tyto způsoby najdeme.

1.



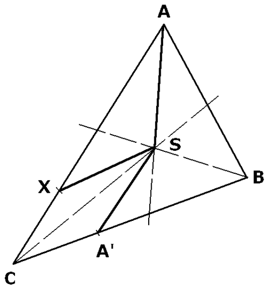
Uvažujme osy stran trojúhelníka. Jejich průsečík (střed kružnice opsané) spojíme s vrcholy trojúhelníka a rozdělíme tak původní trojúhelník na 3 rovnoramenné trojúhelníky, které jsou osově souměrné podle os stran.

2.



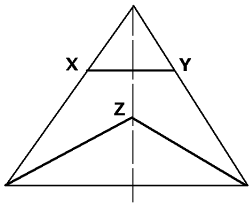
Nyní uvažujme osy úhlů trojúhelníka a jejich průsečík (střed kružnice vepsané). Kolmice z průsečíků na strany trojúhelníka jej rozdělí na 3 deltoidy osově souměrné podle os úhlů původního trojúhelníka.
Důkaz osové souměrnosti: Osa úhlu dělí čtyřúhelník na 2 trojúhelníky shodné podle věty Ssu (společná strana, poloměr kružnice vepsané, pravý úhel). Překlopíme-li trojúhelník podle osy úhlu, trojúhelníky se kryjí $\Rightarrow$ jejich sjednocení (deltoid) je podle osy úhlu osově souměrný.

3.



Opět uvažujme střed kružnice vepsané a trojúhelník, který není rovnostranný. Označme vrcholy trojúhelníka tak, aby $|AB| < |BC|$. Pak na straně BC leží bod A' takový, že $|A'B| = |AB|$. Bod osově souměrný s A' podle CS (osy úhlu při vrcholu C) označme X. Úsečky $AS, A'S, XS$ dělí trojúhelník na 3 osově souměrné části.
Důkaz osové souměrnosti: Trojúhelník $A'BS$ vznikl vlastně překlopením trojúhelníku ABS podle osy BS, takže čtyřúhelník $ABA'S$ je podle BS osově souměrný. O deltoidu $A'CXS$ víme, že je osově souměrný, musíme však ukázat, že $X \in AC$. SC je osa úhlu při vrcholu C, tedy CA je osově souměrná s CB, tedy $X \in AC$. Dále víme: $|AS| = |SA'| = |SX| \Rightarrow$ trojúhelník ASX je rovnoramenný.

4.



Zbývá ukázat, že existuje 3. způsob i pro rovnostranný trojúhelník. Ten můžeme rozdělit například takto: Zvolíme XY rovnoběžnou s jednou stranou, bod Z ležící na ose té stejné strany tak, že vzdálenost bodu Z je menší než vzdálenost přímky XY. Důkaz osové souměrnosti je pak zřejmý.