Vzorové řešení příkladů 1. série

1.1 Je-li délka tětivy 6000 stop a délka odpovídajícího oblouku kružnice 10000 stop, příslušný úhel musí být větší než 2π (jednoduchá úvaha polovičního obvodu kružnice). Nyní sestavíme soustavu dvou rovnic (z pozdějších důvodů je řešení uváděno v radiánech).

(1) $\sin a = \frac{a}{r}$, kde a je poloviční délka tětivy.

(2) $l = r(2p - 2a)$, kde l je délka tětivy.

Pustíme se do řešení této soustavy:

$$l = 2r(p - a) \Rightarrow p - a = \frac{l}{2r} \Rightarrow a = p - \frac{l}{2r}.$$

Dosazením α z (2) do (1) dostaneme:

$$\sin\left(p - \frac{l}{2r}\right) = \frac{a}{r}.$$

Použijeme součtový vzorec pro $\sin(a - b)$:

$$\sin(p) \cdot \cos\left(\frac{l}{2r}\right) - \cos(p) \cdot \sin\left(\frac{l}{2r}\right) = \sin\left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{a}{r}.$$

Tuto rovnici nelze řešit přímo, proto použijeme jisté aproximace pomocí Maclaurinova vzorce pro rozvoj funkce $\sin(x)$:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathbf{K} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Pro naše podmínky stačí první 2 členy této posloupnosti, tedy

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, po dosazení:

$$\frac{l}{2r} - \frac{\frac{l^3}{8r^3}}{3!} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{l}{2r} - \frac{l^3}{48r^3} = \frac{a}{r} \Rightarrow 24lr^2 - l^3 = 48ar^2 \Rightarrow r^2 \cdot (24l - 48a) = l^3 \Rightarrow r^2 = \frac{l^3}{24l - 48a}.$$

$$S = pr^2 = \frac{pl^3}{24l - 48a} \approx 32{,}72 \cdot 10^6\, st^2.$$

Není žádoucí psát výsledek ve tvaru např. $1{,}123456789 \cdot 10^7$. Nevypadá to pěkně a navíc při přibližném počítání se k takovému výsledku ani nedá dojít.

Rozloha ostrova je tedy přibližně 32,72 miliónů stop čtverečních.

1.2 Máme určit n takové, že je dělitelné všemi čísly od 1 do $\sqrt[3]{n}$. Zaveďme substituci $x = \sqrt[3]{n} \Rightarrow n = x^3$. Rozložíme číslo x na součin prvočísel: $x = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \mathbf{K} \cdot p_n^{q_n} \Rightarrow n = p_1^{3q_1} \cdot p_2^{3q_2} \cdot \mathbf{K} \cdot p_n^{3q_n}$. Má platit, že i číslo $(x-1)$ má dělit n. Když se podíváme na rozklad čísla n, můžeme si všimnout, že všechna prvočísla jsou ve třetích mocninách. To znamená, že i všechna prvočísla z rozkladu $(x-1)$ budou ve třetích mocninách, takže máme $n = (x-1)^3 \cdot k^3 = x^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{x^3}{(x-1)^3}} = \frac{x}{x-1}$. Číslo k má být přirozené, takže i podíl $\frac{x}{x-1}$ musí být z oboru přirozených čísel. To je splněno jen pro $x = 2$. Výsledek tedy je $n = 8$, takže osadníci přišli na ostrov v roce 1995 (za předpokladu, že používáme gregoriánský kalendář).

1.3 Číslo ve středu tabulky označíme *a*.

		33
	a	
31	28	

Pak součet čísel v každém sloupci, řádku i úhlopříčce je roven *64 + a*. Nyní můžeme vyjádřit další 2 čísla v tabulce:

	36	33
	a	
31	28	a+5

Číslo v levém horním rohu můžeme vypočítat 2 způsoby: z horního řádku a z diagonály. Označíme-li jej *x*, platí:

$$1)\ x = (64 + a) - 36 - 33$$
$$2)\ x = (64 + a) - a - (a + 5).$$

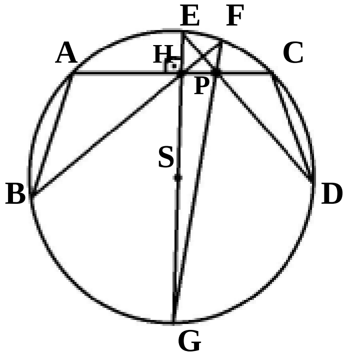
Z toho vyplývá, že

$$36 + 33 = a + a + 5$$
$$a = 32$$

Teď už snadno dopočítáme zbývající čísla v tabulce:

27	36	33
38	32	26
31	28	37

1.4 Některá důležitá místa na ostrově si označíme dle obrázku:



Bod F leží na Thaletově kružnici nad průměrem $GE \Rightarrow |\angle EFG| = 90°$. $|\angle EFG| + |\angle EHC| = 90° + 90° = 180°$, čtyřúhelník HPFE je tedy tětivový. Pak úhly HEP a HFP jsou obvodové úhly příslušné oblouku HP, a tak $|\angle HEP| = |\angle HFP|$. Úhel HEP je zároveň obvodový úhel příslušný oblouku BG a úhel HFP obvodový úhel příslušný oblouku GD. Oba tyto oblouky proto musejí mít stejnou délku. Oblouky AG a CG mají rovněž stejnou délku, a tak $|AB| = |AG| - |BG| = |CG| - |GD| = |CD| \Rightarrow |AB| = |CD|$ (jsou tu myšleny délky oblouků). Takže obě cesty jsou stejně dlouhé.

1.5 Zadání si přepíšeme do matematické podoby: máme rovnici $ax^2+bx+c=0; a,b,c\in Z; a+b+c=p,$ kde p je prvočíslo a platí, že $ax_0^2+bx_0+c=-55$ pro nějaké $x_0\in N$. Víme, že kořeny rovnice jsou přirozená čísla. Máme dokázat, že jeden z kořenů je 2 a druhý máme najít. Kořeny rovnice si označíme x_1, x_2.

Víme:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}; x_1x_2=\frac{c}{a}; x_1,x_2\in N\Rightarrow -\frac{b}{a},\frac{c}{a}\in N\Rightarrow \exists r,s\in N: r=-\frac{b}{a}, s=\frac{c}{a}\Rightarrow b=-ar, c=as.$$

Dostáváme tedy $ax^2+bx+c=ax^2-arx+as=0$. Dále víme, že

$a+b+c=p\Rightarrow a-ar+as=p\Rightarrow a(1-r+s)=p\Rightarrow a=1\vee(1-r+s)=1$

1) $\underline{1-r+s=1}\Rightarrow r=s$

Dostáváme rovnici $a\left(x^2-rx+r\right)=0; a\neq 0$. Pro její kořeny platí:

$x_1+x_2=r$

$x_1x_2=r\Rightarrow x_1+x_2=x_1x_2\Rightarrow x_1=\dfrac{x_2}{x_2-1}$.

Víme, že $x_1,x_2\in N\Rightarrow \dfrac{x_2}{x_2-1}\in N,$ to zřejmě platí jen pro $x_2=2\Rightarrow x_1=2$.

Máme tedy $x_1+x_2=r\Rightarrow r=4\Rightarrow a\left(x^2-4x+4\right)=0$. Ze zadání je $a-4a+4a=p\Rightarrow a=p$.

Poslední podmínkou je, že $ax_0^2+bx_0+c=0$ pro nějaké $x_0\in N.$ Potom dostáváme $a\left(x^2-4x+4\right)=p(x-2)^2=-55$. Nyní si musíme uvědomit, že prvočísla jsou jen kladná a druhá mocnina libovolného čísla je též vždy kladná (resp. nezáporná). Součinem 2 kladných čísel nemůžeme dostat číslo záporné, proto pro $1-r+s=1$ nemá úloha řešení.

2) $\underline{a=1}$: dostáváme rovnici $x^2-rx+s=0$. Zároveň musí platit

$$1-r+s=p\Rightarrow s=r+p-1\Rightarrow x^2-rx+r+p-1=0\Rightarrow x_{1;2}=\frac{r\pm\sqrt{r^2-4(r+p-1)}}{2}.$$

Víme, že $x_1,x_2\in N\Rightarrow\sqrt{r^2-4(r+p-1)}\in N$. Zaveďme substituci

$w=\sqrt{r^2-4(r+p-1)}\Rightarrow w^2=r^2-4(r+p-1)\Rightarrow r^2-w^2=4(r+p-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow(r+w)(r-w)=4(r+p-1)$.

Nyní vyšetříme 2 případy: r je sudé nebo liché.

a) <u>r je liché</u> $\Rightarrow\exists k\in N_0: r=2k+1$.

Pak dostáváme $(2k+1+w)(2k+1-w)=4(2k+p)$

a) w je sudé $\Rightarrow\exists l\in N_0: w=2l\Rightarrow(2k+2l+1)(2k-2l+1)=4(2k+p)$.

Dostáváme, že součin 2 lichých čísel má být sudý, což zcela určitě nejde.

b) w je liché $\Rightarrow\exists l\in N_0: w=2l+1\Rightarrow(2k+2l+2)(2k-2l)=4(2k+p)\Rightarrow$

$\Rightarrow(k+l+1)(k-l)=2k+p$

i) $p=2\Rightarrow(k+l+1)(k-l)=2(k+1)\Rightarrow(k+l)(k-l)+k-l-2k=2\Rightarrow$

$\Rightarrow(k+l)(k-l-1)=2$. Pro $k,l\in N_0$ dostáváme jediné řešení $k=2, l=0\Rightarrow r=5$.

Nyní musíme vyřešit rovnici $x^2-5x+6=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$. Zároveň pro nějakou hodnotu $x_0\in N$ má platit, že $(x_0-2)(x_0-3)=-55$. Zároveň ve všech možných rozkladech čísla –55 se činitelé liší více než o 1, takže žádné $x_0\in N$ nemůžeme najít.

ii) p je liché prvočíslo $\Rightarrow\exists o\in N: p=2o+1\Rightarrow(k+l+1)(k-l)=2k+2o+1$. Výraz na pravé straně je zjevně lichý. Sami si můžete vyzkoušet, že výraz na levé straně je sudý, takže v tomto případě nemůžeme dostat žádné řešení.

b) r je sudé $\Rightarrow \exists k \in N_0 : r = 2k \Rightarrow (2k+w)(2k-w) = (2k-1+p)$. Pokud by *w* bylo liché, pak *2k+w* je liché a *2k-w* je také liché, ale $4(2k-1+p)$ je sudé. Součin dvou lichých čísel nemůže být sudý, takže dostáváme, že *w* je sudé.

$\exists l \in N_0 : w = 2l \Rightarrow (2k+2l)(2k-2l) = 4(2k-1+p) \Rightarrow (k-l)(k+l) = 2k-1+p \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 2k + 1 - l^2 = p \Rightarrow (k+l-1)(k-l-1) = p.$

p je prvočíslo, takže $k-l-1 = 1 \Rightarrow k = l+2 \Rightarrow 2l+1 = p \Rightarrow l = \dfrac{p-1}{2}, k = \dfrac{p+3}{2} \Rightarrow r = p+3$.

Dostáváme tedy rovnici: $x^2 - rx + r + p - 1 = 0 = x^2 - (p+3)x + 2p + 2 = (x-2)(x-p-1)$.

Ze zadání máme podmínku $(x-2)(x-p-1) = -55$ pro nějaké $x \in N$. Navíc je zřejmé, že $(x-2) > (x-p-1)$. Číslo –55 si můžeme vyjádřit celkem čtyřmi způsoby:

$(-1)\cdot 55; 1\cdot(-55); (-5)\cdot 11; 5\cdot(-11)$.

$a)(-1)\cdot 55$: Protože $(x-2) > (x-p-1)$, dostáváme $x-2 = 55 \Rightarrow x = 57$

Dále $x-p-1 = -1 \Rightarrow p = 57$. Číslo 57 není prvočíslo, takže řešení není.

$b)1\cdot(-55): x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$

$x-p-1 = -55 \Rightarrow p = 57$

Opět nastává spor.

$c)(-5)\cdot 11: x-2 = 11 \Rightarrow x = 13$

$x-p-1 = -5 \Rightarrow p = 17$

17 je prvočíslo, takže jedno řešení už máme.

$d)5\cdot(-11): x-2 = 5 \Rightarrow x = 7$

$x-p-1 = -11 \Rightarrow p = 17$

Opět 17 je prvočíslo.

Zadání vyhovuje jen rovnice $(x-2)(x-18) = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 36 = 0$. Snadno ověříme, že tato rovnice vyhovuje zadání. Kořeny této rovnice jsou $x_1 = 2, x_2 = 18$. Máme tedy dokázáno, že Milanovi jsou 2 roky a zjistili jsme, že Lenka má 18 let.

1.6 V tomto příkladu máme určit všechny dvojice čísel $a, b \in N : D(a,b) = 5!$ a $n(a,b) = 50!$.

Nejprve si rozložíme obě čísla na součin prvočísel:

$5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$50! = 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47.$

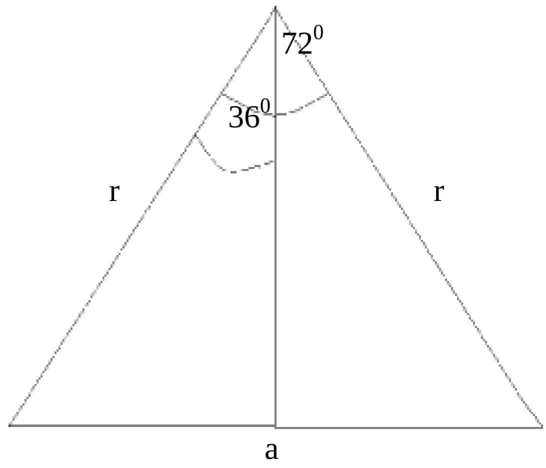
Máme-li dvojici přirozených čísel *a,b* a přirozené číslo *d* tak, že $D(a,b) = d$, potom existují $x, y \in N : a = dx, b = dy \wedge D(x,y) = 1$. V našem případě máme $d = 5! \Rightarrow a = 5! \cdot x \wedge b = 5! \cdot y$.

Pro libovolná $p, q \in N$ platí: $n(p,q) = \dfrac{pq}{D(p,q)}$. Pro naše čísla *a,b* dostáváme:

$$n(a,b) = \frac{5! \cdot x \cdot 5! \cdot y}{5!} = xy \cdot 5! = 50! \Rightarrow xy = \frac{50!}{5!} = 2^{44} \cdot 3^{21} \cdot 5^{11} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$$

což je součin 15 členů z prvočíselného rozkladu čísla $\dfrac{50!}{5!}$. Zároveň víme, že $D(x,y) = 1$. Zřejmě tedy dostáváme, že každý z výše uvedených 15 členů bude právě v jednom z prvočíselných rozkladů čísel *x,y*. Pro každý z těchto 15 členů máme 2 možnosti, kam je přiřadit. Počet řešení je tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{K} \cdot 2\ (15\,\text{krát}) = 2^{15}$.

1.7 Máme sestrojit pravidelný pětiúhelník vepsaný dané kružnici. Odvodíme si tedy délku strany pětiúhelníka v závislosti na poloměru ostrova. Pro ilustraci je uveden obrázek:



Z obrázku vidíme, že $\frac{a}{2} = r \cdot \sin 36° \Rightarrow a = 2r \cdot \sin 36°$.

Nyní budeme využívat jen známé vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Nyní si vyjádříme $\sin 36°$: $0 = \sin 180° = \sin(5 \cdot 36°) = \sin(4 \cdot 36°)\cos(36°) + \sin(36°)\cos(4 \cdot 36°)$. (1)

$$\sin(4 \cdot 36°) = 2 \cdot \sin(2 \cdot 36°) \cdot \cos(2 \cdot 36°) = 4 \cdot \sin(36°) \cdot \cos(36°) \cdot \left[\cos^2(36°) - \sin^2(36°)\right]$$

$$\cos(4 \cdot 36°) = \cos^2(2 \cdot 36°) - \sin^2(2 \cdot 36°) = \left[\cos^2(36°) - \sin^2(36°)\right]^2 - \left[2 \cdot \sin(36°) \cdot \cos(36°)\right]^2.$$

Nyní dosadíme do rovnice (1):

$$0 = 4 \cdot \sin(36°) \cdot \cos^2(36°) \cdot \left[\cos^2(36°) - \sin^2(36°)\right] + \sin(36°)\left[\cos^2(36°) - \sin^2(36°)\right]^2 -$$
$$- 4 \cdot \sin^3(36°) \cdot \cos^2(36°) = 4 \cdot \sin(36°) \cdot \left[1 - \sin^2(36°)\right] \cdot \left[1 - \sin^2(36°) - \sin^2(36°)\right] +$$
$$+ \sin(36°)\left[1 - \sin^2(36°) - \sin^2(36°)\right]^2 - 4 \cdot \sin^3(36°)\left[1 - \sin^2(36°)\right] =$$
$$= \sin(36°)\left[-20 \cdot \sin^2(36°) + 16 \cdot \sin(36°) + 5\right]$$

Nyní dostáváme kvadratickou rovnici, jejímž řešením získáme $\sin 36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Výsledek dosadíme do vztahu pro délku strany pětiúhelníka: $a = 2r \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = r \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Jak úsečku této délky sestrojit? Nejprve sestrojíme úsečku délky $r \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}$: rozpůlíme rozdíl úseček o délkách $5r$ a $\sqrt{5}r$. Úsečku o straně $\sqrt{5}r$ sestrojíme jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka o stranách $2r$ a r. Z Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku platí $v^2 = c_1 c_2$, kde c_1, c_2 jsou úseky přepony, na které ji rozděluje výška. Vezmeme-li pravoúhlý trojúhelník, kde $c_1 = r$ a $c_2 = r \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, získáme vztah $v^2 = r^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow v = r \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, což je strana pravidelného pětiúhelníka.