Vzorové resení 2.série IX. ročníku

Řešení 2.1. *(Podle H. Martináskové) Necht a)* $\emptyset \neq p \cap q = X$. *Pak se snadno presvedcíme o tom, ze* $|\angle PMQ| = \frac{\pi}{2} + \frac{|\angle PXQ|}{2}$, *tedy bod M lezí na ekvigonále nad PQ s tímto úhlem. Naopak pokud M lezí na oblouku ekvigonály dané polorovinou PQX, je splneno zadání. Rozebereme-li ostatní prí pady, dostaneme tak vzdy, ze M lezí na cásti ekvigonály nad PQ s úhlem* $\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$, *kde* φ *je orientovaný úhel který svírají poloprímky p a q. (Pozn. Samozrejme, ze existují singulární prí pady, kdy ekvigonálou je prímka, popr. neexistuje)*

Řešení 2.2. *Vzhledem k tomu, ze zadání bylo dosti nejednoznacné, rozhodli jsme se akceptovat vsechny typy pravidel. Asi nejjednodussí je uvazovat hlásky bez "fleku"a "pas"nepocítat do hlásek. Tech je zrejme 35 ((4 barvy + 1NT)×(7 stupnu)). Pocet vsech sledu je pak roven poctu vsech podmnozin 35-prvkové mnoziny, tedy* 2^{35}. *Kontra apod. téz není obtízné spocítat.*

Řešení 2.3. *První cást byla snadná, a taky ji vsichni zvládli. Uvedme ve zkratce resení: Kdyby totální prvocíslo obsahovalo 4 ruzné cifry (zrejme muze jít jen o cifry 1, 3, 7, 9), muzeme cifry císla p permutovat tak, aby ctyri císlice nejnizsího rádu byly práve 1, 3, 7, 9. Necht tedy* $p = A \cdot 10^4 + B$, *kde B je císlo, vytvorené libovolnou permutací císel 1, 3, 7, 9. Ukázeme, ze p není totální prvocíslo. Zrejme muzeme permutacemi císlic 1, 3, 7, 9 vytvorit císlo, které má libovolný zbytek po delení 7 (* $1379 \equiv 0$, $1793 \equiv 1$, $9137 \equiv 2$, $1739 \equiv 3$, $1397 \equiv 4$, $1937 \equiv 5$, $1973 \equiv 6$*). At je tedy zbytek pri delení císla* $a \cdot 10^4$ *císlem 7 libovolný, vzdy dokázeme poslední 4 cifry preskládat tak, aby výsledné císlo bylo delitelné 7. Druha cást se nesetkala s odezvou, takze se body pouze ztrácely.*

Řešení 2.4. *Nejprve ukazme, ze 63 je správné císlo: Budte k(s,rk=2), l1(s,1) soustredné kruhy. Pokud 63 bodu lezí v kruhu l1, jsme u konce. V opacném prípade vyberu lib. bod X tak, aby |SX|>1. Nyní pokryjme kruh k kruhy* $l_1, l_2, \ldots, l_7$ *podle obrázku. Kdyby v kazdém z nich lezelo nejvýse 9 z daných bodu, pak v k lezí nejvýse* $9 \cdot 7 - 1 = 62$ *bodu, coz není pravda. Proto existuje kruh o polomeru 1, obsahující aspon 10 z daných 63 bodu At kruznice k(s,2) je kruznicí opsanou pravidelnému 53-úhelníku* $A_1A_2 \ldots A_{53}$, $k'(s, \varepsilon)$ *necht je kruznicé opsanou pravidelnému 9-úhelníku* $A_{54}A_{55} \ldots A_{62}$ *(pricemz* ε *je tak malé, aby k' byla disjunktní s kazdým kruhem o polomeru 1, který obsahuje aspon 2 z bodu A1, A2,. . . , A53. Zvolme nyní kruh L o polomeru 1. Aby v L lezelo aspon 10 bodu Ai, pak v nem nutne lezí aspon jeden z bodu A1, A2,. . . , A53.*

(a) *Jestlize L obsahuje aspon 2 z nich, musí jich obsahovat rovnou 10. Z nich vsak vzdy aspon dva mají vzdálenost aspon* $r_k \cdot 2 \cdot \sin(\frac{9}{53\pi}) > 4 \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = 2$, *tedy vetsí nez prumer kruhu L!*

(b) *L obsahuje prýve jeden z nich, jenze pak v nem nelezí aspon jeden bod z* $A_{54}, A_{55}, \ldots A_{62}$. *Libovolný kruh L tedy obsahuje nejvýse 9 bodu, proto 63 je nejmensí správné císlo.*

Řešení 2.5. *Zelene obarveme vsechny vrcholy rovnobezníku. Nyní provádejme následující operaci: leží-li zelený bod X uvnitr strany AB rovnobezníka ABCD, obarvíme zelene i ten bod strany CD, pro nejz XY//BC a spojíme je úseckou. Snadno se dokáze:*

- *uvedenou operaci provedeme jen konecne krát*
- *kazdý rovnobezník se rozdelí na nekolik s ním podobných Pevne zvolme stranu 4k-úhelníka. At O, P jsou dva sousední zelené body na ní. Nazveme pásem souvislou mnozinu rovnobezníku vznikající tak, ze do ní ulozíme rovnobezník OPO1P1, pak O1P1O2P2, O2P2O3P3,... (rovnobezníky naseho rozkladu znacené klasicky). Není zádným tajemstvím, ze:*
- *pás obsahuje jen konecne mnoho rovnobezníku*
- *jedna strana protejsího z nich leží na protejsí strane 4k-úhelníka ke dríve pevne zvolené*
- *kazdý rovnobezník rozkladu leží práve ve dvou pásech (daných smery jeho stran)*
- *dva pásy se protínají $\iff$ zacínají na ruzných stranách 4k-úhelníka*
- *protínající se pásy mají spolecný práve jeden rovnobezník (to stojí za zvázení)*

Dále jiz snadno nahlédneme, ze pravoúhelníky v daném pásu jsou práve jeho prusecíky s pásy zacínajícími na stranách kolmých k té na níz pás zacíná, tedy vsechny mají jednu stranu velikosti sírky pásu a soucet druhých stran je jedna, cili soucet obsahu je císelne roven sírce pásu. Sectením rovností kolem celého 4k-úhelníka a protoze kazdý pravoúhelník je zapocítán ctyrikrát, obdrzíme hledaný soucet k.

Řešení 2.6. *Rozdelme daný 2n-úhelník prímkou A1An+1 na dva (n+1)-úhelníky $\mathcal{M} = A_1 \dots A_{n+1}$ a $\mathcal{N} = A_1 A_{n+1} \dots A_{2n}$. Pak bod P leží alespon v jednom z nich. Necht napr. $P \in \mathcal{M}$. Pak prímky PA1, $PA_{n+1} \dots PA_{2n}$ neprotínají zádnou z n stran $A_{n+1} \dots A_{2n}$ ve vnitrním bode. Zbývá n-1 prímek, zustane tedy alespon jedna z uvedených stran $\mathcal{N}$ neprotata ve vnitrním bode.*

Řešení 2.7. *Daná rovnice má tolik resení, kolik existuje kladných delitelu a2. Je totiz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = (x-a)(y-a)$. Tedy (x-a)/a2 a kazdý delitel a2 urcuje práve jedno resení. Císla 1, a, a2 jsou ruzní delitelé a. Protoze 1999 je prvocíslo, tak 1, 1999, 19992 jsou jedinými deliteli 19992 a rovnice má práve tri resení.*