Řešení 6. série V. ročníku BRKOSu

6.1 Na kružnici jsou dány pevně dva body A, B ($A \neq B$) a dále bod M, který probíhá celou kružnici ($M \neq A, B$). Ze středu K úsečky MB je vedena kolmice KP na přímku MA ($P \in MA$).
a) Dokažte,že přímky KP procházejí jedním bodem.
b) Nalezněte množinu bodů P.

Řešení. a) Označme C bod kružnice takový, že AC je jejím průměrem.
Nechť nejdříve $B \neq C$.Platí $|\angle ABC| = |\angle AMC| = 90° = |\angle APK|$. Odtud $MC||KP$. Vzhledem k $|MK| = |BK|$ zjišťujeme, že přímka KP protíná BC ve středu H. Tzn všechny přímky PK procházejí bodem H.
Nyní nechť $B = C$, pak zřejmě všechny přímky prochází bodem B.
b) Body P mají tu vlastnost, že $|\angle APH| = 90°$(respektive $P = M$ pokud $B = C$). Odtud zřejmě plyne, že hledanou množinou bodů je kružnice nad průměrem AH(respektive AB), vyjma bodů A, H(respektive A, B).

6.2 Dokažte, že do konvexního čtyřúhelníku o obsahu S a obvodu P je možné umístit kruh o poloměru S/P.

Řešení. Dokážeme obecnější tvrzení. Nechť máme dán konvexní n-úhelník o stranách $a_1, a_2, \ldots, a_n$, obsahu S a obvodu $P = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Pak do něj lze umístit kruh s poloměrem S/P.
Důkaz. Namalujme si obdélník o straně P a obsahu S (druhá strana je tedy S/P) a "rozřežme" jej na "proužky" $a_i \times S/P$. Každý takový proužek "vlepme" na stranu n-úhelníka (směrem dovnitř). Tyto proužky se budou porůznu překrývat, vyčuhovat ven apod. Vzhledem k tomu, že obsahy (obdélníku a n-úhelníku) jsou stejné, budou některé body uvnitř n-úhelníku nepokryté. Jakýkoliv nepokrytý bod lze vzít za střed kružnice o poloměru S/P, která celá leží uvnitř n-úhelníku.

6.3 Nad hranami AB, AC, AD čtyřstěnu $ABCD$ jsou sestrojeny koule. Dokažte, že koule pokrývají celý čtyřstěn.

Řešení. Označme H patu kolmice vedenou z bodu A na rovinu BCD. Podobně označme K, L, M paty kolmic vedených z bodu A na přímky BC, CD, DB. Pak body H, K, M leží na kouli nad hranou AB a tedy jehlan $ABKHM$ je uvnitř této koule. Tím jsme hotovi neboť, pokud H leží uvnitř ABC máme čtyřstěn rozdělen na tři jehlany, z nichž každý se "schová" v jedné kouli, a pokud je H vně, pak je čtyřstěn částí jehlanu $ABCDH$, který je opět rozdělen na tři, schované v jednotlivých koulích.

6.4 Jsou dána nesoudělná celá čísla $p > 0$, $q > 0$. Celé číslo n nazveme dobré, jestliže je možné napsat n ve tvaru $n = xp + yq$, kde $x, y \in \mathbb{N}_0$ a špatným v opačném případě.
a) Dokažte, že existuje celé číslo c, které má následující vlastnost: pro libovolné celé číslo n je právě jedno z čísel $n, c - n$ dobré.
b) Kolik je všech kladných špatných čísel.

Řešení. Lemma: Nechť $p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná. Pro libovolné celé z existuje právě jedna dvojice celých čísel (x, y) taková, že $z = xp + yq$, $0 \leq x \leq q - 1$.
Důkaz: Čísla $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, (q-1) \cdot p$ dávají po dělení q různé zbytky. Označme $x \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ takové, že $z \equiv x \cdot p \pmod{q}$ (je právě jedno). K tomuto x je již y jednoznačně určeno.

Každému z přiřaďme dvojici (x, y) z Lemmatu. Zřejmě jde o bijekci. Číslo z je dobré právě tehdy, když $y \geq 0$. K číslu $z \approx (x, y)$ uvažme nyní číslo $z' = (q-1-x)p + (-1-y)q$. Je zřejmé, že pokud z je dobré je z' špatné a naopak. Uvážíme-li tedy $z' + z = pq - p - q = c$, pak c má vlastnost požadovanou v a). Protože 0 je nejmenší dobré číslo, c je největší špatné číslo. Odtud snadno: počet kladných špatných čísel je $\frac{1}{2} \cdot (c+1) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

6.5 Nechť a, b, c, d jsou kladná čísla. Dokažte, že jedna z následujících nerovností neplatí.

$$\begin{aligned} a+b &< c+d && (1) \\ (a+b)(c+d) &< ab+cd && (2) \\ (a+b)cd &< (c+d)ab && (3) \end{aligned}$$

Řešení. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí $(x-y)^2 \geq 0$, úpravou $(x+y)^2 \geq 4xy$. Pžedpokládejme, že platí všechny nerovnosti. Pak platí $4ab \leq (a+b)^2 \overset{(1)}{<} (a+b)(c+d) \overset{(2)}{<} ab+cd$. Odtud $3ab < cd$ $(*)$. Podobně $4(a+b)cd \overset{(3)}{<} 4ab(c+d) \leq (a+b)^2(c+d) \overset{(2)}{<} (a+b)(ab+cd)$, odkud $3cd < ab$ $(**)$. Je zřejmé, že nerovnosti $(*)$, $(**)$ jsou ve sporu.

6.6 Je dáno n různých kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z nich jsou sestaveny všechny možné součty s libovolným počtem sčítanců (1 až n), přičemž v každém součtu se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou. Dokažte, že mezi těmito součty je alespoň $\frac{n(n+1)}{2}$ navzájem různých čísel.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Uvažme čísla

$$\begin{array}{llllll} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_1 + a_n & a_2 + a_n & \ldots & a_{n-2} + a_n & a_{n-1} + a_n & \\ a_1 + a_{n-1} + a_n & a_2 + a_{n-1} + a_n & \ldots & a_{n-2} + a_{n-1} + a_n & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_1 + a_3 + \cdots + a_n & a_2 + \cdots + a_n & & & & \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n & & & & & \end{array}$$

Je zřejmé, že čísla (čtená po řádcích) jsou uspořádána vzestupně. Tím jsme našli $\frac{n(n+1)}{2}$ různých čísel.
Pozn. $\frac{n(n+1)}{2}$ je minimum neboť pro $a_i = i$ můžeme dostat nejvýše číslo $\frac{n(n+1)}{2}$.

6.7 Mějme N lidí, kteří se navzájem neznají. Dokažte, že je lze seznámit tak, aby žádní tři neměli stejný počet známých.

Řešení. Pokud je N liché, tak nejprve jednoho člobrdu odděláme a nebudeme ho s nikým seznamovat. Nyní nám v každém případě zbude sudý počet lidí. Ty rozdělíme do dvou skupin A a B o k lidech. Lidi ve skupinách jednoznačně očíslujme čísly od 1 do k. Nyní seznámíme každé dva lidi z různých skupin, jejichž součet čísel je maximálně $k+1$. Pak má i-tý člověk v libovolné skupině právě $k-i+1$ známých. Skupiny jsou dvě, tedy stejný počet známých mají nanejvýš dva lidé.

Tak nám skončil zase jeden ročník BRKOSu.
Doufám, že jste s ním byli spokojeni. Já osobně moc ne, protože jej provázelo mnoho nepřesností a zdržení. To poslední zdržení bylo zapříčiněno problémy kolem termínu soustředění. Vše se však nakonec podařilo zařídit a sousředění bude, i když v poněkud netradičním termínu. Pro vaši informaci: na soustředení pojede 20 řešitelů.
Doufám, že ti co se na soustředění nedostanou to neodradí a budou BRKOS řešit i v následujícím školním roce.

Všem přeji betelný prázdniny i to co bude následovat.

Za organizátory semináře
Ondřej Klíma