Řešení 5. série V. ročníku BRKOSu

5.1. Dokažte, že pokud v konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\angle ABC| = |\angle ADE|$ a $|\angle AEC| = |\angle ADB|$, pak $|\angle BAC| = |\angle DAE|$.

Řešení. Označme X průsečík BD a EC. Z rovnosti úhlů $|\angle AEC| = |\angle ADB|$ plyne, že body A, X, D, E leží na kružnici. Z toho plyne $|\angle EXA| = |\angle EDA| = |\angle ABC|$ a tedy $|\angle ABC| + |\angle AXC| = 180°$. Proto body A, B, C, X leží na kružnici. Platí tedy následující rovnosti úhlů: $|\angle BAC| = |\angle BXC| = |\angle DXE| = |\angle DAE|$.

5.2. V $\triangle ABC$ je M střed BC; O střed vepsané kružnice; H pata výšky zpuštěné z A na BC; E průsečík OM a AH. Dokažte, že $|AE| = r$ (poloměr kružnice vepsané).

Řešení. Pro jednoduchost budeme předpokládat $c > b$. Označme $P \in BC$ patu kolmice vedenou z bodu O. O je střed kružnice vepsané $|OP| = r$. Zřejmě platí $|CH| = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, $|CP| = \frac{a+b-c}{2}$, $|CM| = \frac{a}{2}$ (první vztah plyne z cosinové věty pro $\triangle ABC$). Trojúhelníky OPM a EHM jsou podobné a proto: $\frac{|EH|}{r} = \frac{|EH|}{|OP|} = \frac{|HM|}{|PM|} = \frac{|CM|-|CH|}{|CM|-|CP|} = \frac{c+b}{a}$. Dále platí $|AH| \cdot a = 2S_{ABC} = r \cdot (a + b + c)$, z čehož plyne $\frac{|AH|}{r} = \frac{a+b+c}{a}$. Nyní $\frac{|AE|}{r} = \frac{|AH|}{r} - \frac{|EH|}{r} = \frac{a+b+c}{a} - \frac{b+c}{a} = 1$.

5.3. Dokažte, že pro libovolné $s > 1$, $s \in \mathbb{N}$ má rovnice

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_s^2}$$

nekonečně mnoho řešení v oboru $\mathbb{N}$.

Řešení. Je zřejmé, že pokud je $(x_0, \ldots, x_s)$ řešením, pak je řešením i $(t \cdot x_0, \ldots, t \cdot x_s)$ pro libovolné $t \in \mathbb{N}$. Stačí tedy dokázat, že existuje alespoň jedno řešení. Budeme dokazovat indukcí.

(i) $s = 2$ je řešení např. $x_0 = 12, x_1 = 15, x_2 = 20$.

(ii) Nechť $(x_0, \ldots, x_s)$ je řešení a položme $y_0 = 12x_0, y_1 = 15x_0$ a dále $y_i = 20x_{i-1}$ pro $i \in \{2, 3, \ldots, s+1\}$. Snadno se ověří, že $(y_0, \ldots, y_{s+1})$ je řešením rovnice. Podmínka $y_0 < y_1 < \cdots < y_{s+1}$ je splněna triviálně.

5.4. Rozhodněte, zda existuje zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňuje $f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Řešení. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že f splňuje podmínky zadání. Uvažme z množiny $\mathbb{N}/\{1\}$ takové a, pro něž platí $f(a) \leq f(n)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}/\{1\}$ (pokud je takových a více, uvažme z nich to nejmenší). Toto a splňuje rovnost $f(a) = f(f(a-1)) + f(f(a+1)) \geq 2$. Odtud $f(f(a-1)) < f(a)$, $f(f(a+1)) < f(a)$. Vzhledem k volbě a dostáváme $f(a-1) = f(a+1) = 1$. Ovšem $f(a) \leq f(a+1)$ a tedy $f(a) = 1$, což je spor s výše uvedeným poznatkem $f(a) \geq 2$.

5.5. Nechť $a + b + c = 1$ a a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$.

Řešení. Zřejmě platí $a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$, $c < \frac{1}{2}$. Jinak by vzhledem k $a + b + c = 1$ nebyla splněna trojúhelníková nerovnost. Odtud $a^2 < \frac{1}{2}a$, $b^2 < \frac{1}{2}b$, $c^2 \frac{1}{2}c$ a sečtením dostáváme požedované.

5.6. Nechť $\{a\}_i = 0^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel daná rekurentní formulí $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{1996}}$ a rovností $a_0 = 2$. Dokažte, že platí nerovnost $a_{(k-2)k^{1996}} \geq k$ pro libovolné přirozené číslo $k \geq 2$.

Řešení. Sporem. Předpokládejme, že pro nějaké k platí $a_{(k-2)k^{1996}} < k$. Pak pro $\forall n : n \leq (k-2)k^{1996} \Rightarrow a_n < k$. Tedy pro $\forall n : n < (k-2)k^{1996} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^{1996}} > \frac{1}{k^{1996}}$. Odtud $a_{(k-2)k^{1996}} - a_0 > \frac{(k-2)k^{1996}}{k^{1996}} = k - 2$. Tedy $k > a_{(k-2)k^{1996}} > a_0 + k - 2 = k$. Toť spor.

5.7. Mějme M nějakou množinu n $(n \geq 3)$ různých reálných čísel. Nyní vezmeme trojici čísel a, b, c a místo nich dáme do množiny M čísla $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$. Celou tuto operaci konečněkrát opakujeme a dostaneme opět množinu M. Určete všechny množiny, které mají popsanou vlastnost.

Řešení. Označme $S_M = \sum x^2$, kde sčítáme přes všechny prvky množiny M. Podívejme se jak bude vypadat S_M po provedení operace. S_M se změní o následující výraz $(a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 + (b+c-a)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$. (Nebo se počet prvků množiny M zmenší – v tom případě však zřejmě nikdy nemůžeme získat původní množinu.) To je nezáporné číslo. Vzhledem k tomu, že čísla a, b, c jsou různá, S_M se zvětší po provedení první operace a už se nemůže zmenšit. Tzn nemůžeme obdržet opět původní množinu. Množina s popsanou vlastností tedy neexistuje.
