Řešení 4. série V. ročníku BRKOSu

4.1 Na oblouku BC, kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC, je zvolen bod P. Přímky AP a BC se protínají v bodě Q. Dokažte, že $\frac{1}{|PQ|} = \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|}$.

Řešení. Poněvadž $P \in k$ je $|\angle BPC| = 120°$, $|\angle QPC| = 60°$. Na prodloužení CP za bodem P uvažme bod B' tak, že $|BP| = |B'P|$. Je tedy $\triangle BB'P$ rovnostranný a proto $QP||BB'$. Platí $\frac{|PQ|}{|PB|} = \frac{|PQ|}{|BB'|} = \frac{|CQ|}{|BC|}$. Analogicky označíme C' a odvodíme vztahy $\frac{|PQ|}{|PC|} = \frac{|PQ|}{|CC'|} = \frac{|BQ|}{|BC|}$. Sečtením dostaneme požadované.

4.2 V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ mají strany AB a CD stejnou velikost (a nejsou rovnoběžné). Dokažte, že přímka, procházející středy stran BC a AD, svírá s přímkami AB a CD stejný úhel.

Řešení. Označme M, N středy stran BC, AD. Bod D' nechť je takový, že $BCDD'$ je rovnoběžník. Bod P nechť je střed AD'. Nyní $|AB| = |CD| = |BD'|$, z toho plyne, že BP je osa rovnoramenného $\triangle ABD'$. Stačí tedy dokázat $BP||MN$, neboť pak je zřejmé, že MN svírá s DC a AB stejný úhel. Body P, M, N jsou středy stran, a proto platí: $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ a tedy $BMNP$ je rovnoběžník.

4.3 Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu:

$$\begin{aligned}
(x_3 + x_4 + x_5)^5 &= 3x_1 \\
(x_4 + x_5 + x_1)^5 &= 3x_2 \\
(x_5 + x_1 + x_2)^5 &= 3x_3 \\
(x_1 + x_2 + x_3)^5 &= 3x_4 \\
(x_2 + x_3 + x_4)^5 &= 3x_5
\end{aligned}$$

Řešení. Soustava je cyklická a proto můžeme předpokládat $x_1 \geq x_i \ \forall i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Poněvadž $f(x) = x^5$ je rostoucí, tak platí: $3x_2 = (x_4 + x_5 + x_1)^5 \geq (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1$ tudíž $x_1 = x_2$. Stejným způsobem postupně dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Řešíme tedy rovnici $(3x)^5 = 3x$, která má zřejmě tři řešení $0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$. To jsou také řešení počáteční úlohy.

4.4 Reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ splňují $x_i \geq 1 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \ldots (x_n^2 - 1) \leq (x_1 x_2 \ldots x_n - 1)^2$$

a zjistěte kdy nastane rovnost.

Řešení. Lemma 1. Pro $x \geq 1$ platí $(x-1)^2 \leq x^2 - 1$, kde rovnost nastává pro $x = 1$.

Důkaz: $2(x-1) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 1 \Rightarrow (x-1)^2 \leq x^2 - 1$

Lemma 2. Pro $x, y \geq 1$ platí $(x^2 - 1)(y^2 - 1) \leq (xy - 1)^2$, kde rovnost pro $x = y$.

Důkaz: $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \leq x^2y^2 - 2xy + 1 \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) \leq (xy-1)^2$

Nerovnost dokážeme indukcí:

(i) $n = 2$ platí podle Lammatu 2, rovnost pro $x_1 = x_2$

(ii) $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\dots(x_n^2-1) \leq (x_1^2-1)(x_2\dots x_n-1)^2 \leq (x_1^2-1)(x_2^2\dots x_n^2-1) \leq (x_1x_2\dots x_n-1)^2$ kde první nerovnost je indukční předpoklad, druhá platí podle Lemmatu 1 a třetí podle Lemmatu 2.

Diskutujme nyní rovnost. Rovnost v posledních dvou nerovnostech pokud $x_1 = x_2 \dots x_n = 1$. Což s počáteční podmínkou $x_i \geq 1$ dává $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Závěr: Rovnost a) $n = 2$ pro $x_1 = x_2$ b) $n > 2$ pro $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

4.5 Dokažte pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}^+$ nerovnost $a^2 + 3ab + b^2 + \sqrt{ab^3} - a^3b^{-1} - b^3a^{-1} < 6a^2$

Řešení. Položme $k \in \mathbb{R}^+$; $k = \frac{a}{b}$. Dosazením do nerovnosti za $a = kb$ a podělením b^2 získáme ekvivalentní nerovnost: $5k^2 + k^3 + \frac{1}{k} > 3k + \sqrt{k} + 1$. Tuto nerovnost dokážeme sečtením následujících $A - G$ nerovností.

$$\begin{array}{rcccc}
2k^2 + 2k^2 + \frac{1}{4k} & \geq & 3\sqrt[3]{2k^2 \cdot 2k^2 \cdot \frac{1}{4k}} & = & 3k \\
k^2 + \frac{1}{4k} & \geq & 2\sqrt{k^2 \cdot \frac{1}{4k}} & = & \sqrt{k} \\
k^3 + \frac{1}{4k} & \geq & 2\sqrt{k^3 \cdot \frac{1}{4k}} & = & k \\
k + \frac{1}{4k} & \geq & 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{4k}} & = & 1
\end{array}$$

Protože nemůže nastat v těchto nerovnostech současně rovnost, můžeme napsat výslednou nerovnost jako ostrou.

4.6 Nalezněte všechny polynomy $p(x)$ s reálnými koeficienty tak, aby
$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x\,[\,p(x+2) - p(x)] - 3\,[\,3p(x+2) - p(x)] = 0$

Řešení. Přepišme podmínku do jiného tvaru $(x-9)p(x+2)-(x-3)p(x) = 0$. Postupně dostáváme: $x = 3 \Rightarrow p(5) = 0$, $x = 5 \Rightarrow p(7) = 0$, $x = 7 \Rightarrow p(9) = 0$. Je tedy zřejmě $p(x) = (x-9)(x-7)(x-5)q(x)$, kde $q(x)$ je polynom s reálnými koeficienty. Dosaďme toto vyjádření do podmínky, pak dostaneme následující rovnost $(x-9)(x-7)(x-5)(x-3)[q(x+2) - q(x)] = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že $q(x+2) - q(x)$ je nulový polynom, a tedy $q(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Celkem zjistíme, že polynomy splňující podmínku v zadání jsou tvaru $p(x) = a \cdot (x-5)(x-7)(x-9)$, kde a je libovolné reálné číslo.

4.7 Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$ je celé číslo, pak je rovno číslu 5.

Řešení. Nejdříve předešleme dva úvodní výpočty.
(i) $c = \frac{a^2+b^2}{ab-1} > \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ a tedy $c \geq 3$.
(ii) $b = 1 \Rightarrow c = \frac{a^2+b^2}{ab-1} = \frac{a^2+1}{a-1} = a + 1 + \frac{2}{a-1} \Rightarrow \frac{2}{a-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow a - 1|2 \Rightarrow a = 2 \vee a = 3$. V obou případech je $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = 5$.
Označme nyní pro $c \in \mathbb{N}: M_c = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a^2 + b^2 - abc + c = 0\}$. Ukážeme, že $c = 5$.
Nechť $M_c \neq \emptyset$. Uvažme $(a_0, b_0) \in M_c$ takovou dvojici ,která splňuje $a_0 \geq b_0$ a pro libovolnou dvojici $(a, b) \in M_c$ platí $a + b \geq a_0 + b_0$. (Tato dvojice je tímto jednoznačně definována. Protože tohoto

faktu nevyužijeme, nebudeme to zde dokazovat.)
Uvažme dále funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanou předpisem $f(x) = x^2 - b_0cx + b_0^2 + c$. Platí : $f(a_0) = 0$. Z Vietových (Newtonových) vztahů plyne, že $a' = b_0c - a_0 = \frac{b_0^2+c}{a_0} \in \mathbb{N}$ je druhý kořen f. Tedy $(b_0c - a_0, b_0) \in M_c$ a podle výběru (a_0, b_0) máme $a_0 \leq b_0c - a_0$. Tudíž a_0 je menší z kořenů f (popřípadě dvojnásobný kořen), a proto pro libovolné $x \leq a_0$ je $f(x) \geq 0$. Speciálně pro b_0 dostáváme $2b_0^2 - b_0^2c + c \geq 0$. Odtud s využitím $c \geq 3$ dostaneme $2b_0^2 \geq c(b_0^2 - 1) \geq 3b_0^2 - 3$. To platí pouze pro $b_0 = 1$. Podle (ii) tedy $c = 5$.
