Řešení 3. série V. ročníku BRKOSu

3.1. Každá úhlopříčka konvexního pětiúhelníku $ABCDE$ od něj odsekává trojúhelník s obsahem 1. Vypočtěte obsah pětiúhelníku.

Řešení. V celém řešení značí S_{XYZ} obsah $\triangle XYZ$ a S_{ABCDE} je obsah pětiúhelníku $ABCDE$.
Z faktu $S_{ABC} = S_{ABE}$ plyne $EC||AB$. Analogicky je každá úhlopříčka rovnoběžná s příslušnou stranou.
Nechť P je průsečík BD a EC a označme $x = S_{BPC} = S_{BEC} - S_{BEP} = S_{BED} - S_{BEP} = S_{EPD}$.
Pak $S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EPB} + S_{EDC} + S_{BPC} = 3 + x$, neboť $ABPE$ je rovnoběžník a tudíž $S_{EPB} = S_{ABE} = 1$. Nyní určíme x. Platí $S_{BPC} : S_{DPC} = |BP| : |DP| = S_{EPB} : S_{EPD}$ tzn. $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$. Odtud plyne, že x je kladné řešení rovnice $x^2 + x - 1 = 0$ a tudíž $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Celkem $S_{ABCDE} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

3.2. $\triangle ABC$ je rovnoramenný se základnou AC a ostrým úhlem při vrcholu B. CD je osa úhlu u vrcholu C, kde bod D leží na straně AB. Bodem D je vedena přímka kolmá k ose. Tato přímka protíná přímku AC v bodě E. Dokažte, že $|AD| = \frac{1}{2}|EC|$.

Řešení. Označme S střed EC. S je střed Thaletovy kružnice nad průměrem EC. Tedy $|SD| = |SC| = |SE| = \frac{1}{2}|EC|$. Navíc $\angle ESD$ je úhel středový k obvodovému $\angle ECD$. Odtud $|\angle BAC| = |\angle ACB| = 2|\angle ACD| = 2|\angle ECD| = |\angle ESD|$. Tzn $\triangle ADS$ je rovnoramenný. Z čehož dostáváme $|AD| = |SD| = \frac{1}{2}|EC|$.

3.3. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

.

Řešení. Pro daná čísla dokážem následující:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geq 2$$

(i) Cauchyho nerovnost pro $n = 4$ nám říká: $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2$. Položíme-li zde $x_1 = \sqrt{\frac{a}{b+c}}, x_2 = \sqrt{\frac{b}{c+d}}, x_3 = \sqrt{\frac{c}{d+a}}, x_4 = \sqrt{\frac{d}{a+b}}, y_1 = \sqrt{a(b+c)}, y_2 = \sqrt{b(c+d)}, y_3 = \sqrt{c(d+a)}, y_4 = \sqrt{d(a+b)}$ dostaneme první nerovnost. (Pozn: Lze též dostat z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$.)

(ii) Zřejmě platí $a^2 + c^2 \geq 2ac, b^2 + d^2 \geq 2bd$. Z toho plyne $(a+b+c+d)^2 \geq 4ac + 4bd + 2(ab + bc + cd + da)$ což je druhá nerovnost.

3.4. Najděte všechna přirozená čísla x, y splňující rovnost $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$.

Řešení. Nejdříve zjistíme zda existuje řešení pro malá y. $y = 1 \Rightarrow x = 1$, $y = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$, $y = 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$, $y = 4 \Rightarrow x = 2$. Máme tedy 2 řešení $[1, 1], [2, 4]$ a v dalším ukážeme, že jsou to řešení jediná. Nechť nyní $y \geq 5$. Platí $7^x - 1 = (7-1)(7^{x-1} + 7^{x-2} + \cdots + 7 + 1) = 3 \cdot 2^y = 6 \cdot 2^{y-1}$ tedy $7^{x-1} + 7^{x-2} + \cdots + 7 + 1 = 2^{y-1}$. Z toho plyne, že x je sudé ($x = 2m, m \in \mathbb{N}$). Odtud $48 \cdot 2^{y-4} = 3 \cdot 2^y = 7^x - 1 = 7^{2m} - 1 = (7^2 - 1)(7^{2m-2} + 7^{2m-4} + \cdots + 7^2 + 1) \Rightarrow 2^{y-4} = 7^{2m-2} + 7^{2m-4} + \cdots + 7^2 + 1$. Z toho plyne,že m je sudé a tedy $x = 4p, p \in \mathbb{N}$. Opět rozepíšeme a dostaneme $3 \cdot 2^y = 7^x - 1 = 7^{4p} - 1 = (7^4 - 1)(7^{4p-4} + \cdots + 1)$. Ovšem $7^4 - 1$ je dělitelné $5 \Rightarrow$ pro $y \geq 5$ neexistuje x splnující rovnici.

3.5. Určete pro všechna $n \in \mathbb{N}$ číslo

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3} \binom{n}{k}$$

Řešení. Omlouváme se řešitelům za chybu v zadání, která byla naštěstí toho rázu, že ji všichni odhalili.

Příklad všichni řešili tak, že sumu upravovali, až to nějak vyšlo. My zde budeme prezentovat jiný postup.

Pokusíme se nějak interpretovat daný součet a pak zkonstruovaný problém vyřešit jinak.

Problém: Na sjezdu se sešlo n lidí plus bývalý Předseda a Místopředseda. Bylo rozhodnuto, že se zvolí Ústřední Výbor, v rámci něhož bude fungovat Triumvirát, přičemž se neví kolik členů bude ÚV mít (avšak aspoň tři (členy T)). Dále se určilo,že P a M budou členy ÚV. Kolik je možných voleb.

Řešení: Označme hledaný počet $s(n)$.

(i) Možné volby rozdělíme do skupin podle velikosti ÚV. Nechť má ÚV $(k+2)$ členů $(1 \leq k \leq n)$. Pak takových ÚV je $\binom{n}{k}$ neboť P a M musí být členové ÚV. V takovém ÚV je $\binom{k+2}{3}$ možností pro T. Odtud počet všech ÚV o $(k+2)$ členech je roven $\binom{k+2}{3}\binom{n}{k}$. Počet všech voleb je tedy $s(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3}\binom{n}{k}$

(ii) Možné volby rozdělíme do čtyř skupin podle toho zda jsou P a M v T.
1) P a M jsou v T. Pak máme n možných voleb třetího člena T. Zbylí členové buď jsou nebo nejsou v ÚV. Tedy počet voleb je $n \cdot 2^{n-1}$.
2), 3) Jeden z P a M je v T. Počet voleb je $\binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$.
4) Žádný z P a M není v T. Počet voleb je $\binom{n}{3} \cdot 2^{n-3}$.
Celkem dostáváme $s(n) = n \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot 2^{n-3}$.

Úpravou předešlého vztahu lze tedy dojít k vyjádření:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3}\binom{n}{k} = (n^3 + 9n^2 + 14n)\frac{2^{n-4}}{3}$$

3.6. Uvažme tabulku 2000×2000. Do každého pole umístíme nejvýše jednu $*$. Do každého pole tabulky zapišme číslo, které označuje počet $*$ v čtverci 3×3 se středem v tomto poli, s vyjímkou, že místo čísla 9 zapíšeme číslo -10. Nalezněte maximální možný součet všech čísel v tabulce.

Řešení. Tabulka obsahuje 4 rohové, 7 992 krajových a 3 992 004 středových polí. V každém rohovém poli je zapsáno nejvýše číslo 4, v každém krajovém poli nejvýše číslo 6, v každém středovém nejvýše číslo 8. Označíme-li S součet všech čísel v tabulce, můžeme psát odhad: $S \leq 4 \cdot 4 + 6 \cdot 7\ 992 + 8 \cdot 3\ 992\ 004 = 31\ 984\ 000$. Nyní popíšeme tabulku se součtem 31 984 000. Do pole tabulky dáme $*$, jestliže alespoň jedna ze souřednic pole není dělitelná 3.

3.7. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\} : f(\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y) + f(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x) > f(x) + f(y)$$

Řešení. Nechť funkce f vyhovuje zadání úlohy. Pak $2f(1) = f(1) + f(1) < f(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 1) + f(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 1) = f(\frac{3\sqrt{5}}{5}) + f(\frac{\sqrt{5}}{5}) = f(\frac{\sqrt{5}}{5}) + f(\frac{3\sqrt{5}}{5}) < f(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}) + f(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, což není možné. Proto zadání žádná funkce nevyhovuje.
