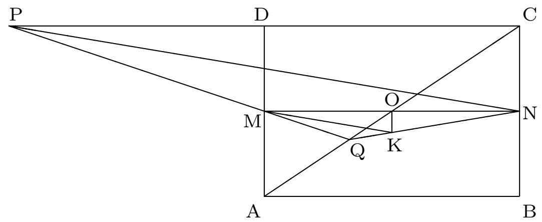
Řešení 2. série V. ročníku BRKOSu

2.1 V obdélníku $ABCD$ je bod M střed strany AD, N střed BC. Na prodloužení DC za bodem D je zvolen bod P. Nechť Q je průsečík přímek PM a AC. Dokažte, že $|\angle QNM| = |\angle MNP|$.

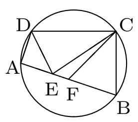
Řešení.



Doznačme O střed MN, $K \in QN$ ($KO \| BC$). Zřejmě platí $|\angle QNM| = |\angle KNO| = |\angle KMO|$, neboť $\triangle KNO \simeq \triangle KMO$. Poněvadž $MO \| PC$ platí $\frac{|QM|}{|QP|} = \frac{|QO|}{|QC|}$ a dále $KO \| NC$ z čehož $\frac{|QO|}{|QC|} = \frac{|QK|}{|QN|}$. Porovnáním těchto rovností dostaneme $\frac{|QM|}{|QP|} = \frac{|QK|}{|QN|}$, z čehož plyne $KM \| NP$. Úhly $\angle KMO$, $\angle MNP$ jsou střídavé a proto $|\angle QNM| = |\angle KMO| = |\angle MNP|$.

2.2 Je dán konvexní tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že kružnice k se středem na AB se dotýká ostatních stran. Dokažte, že $|AD| + |BC| = |AB|$.

Řešení.



Označme F střed kružnice „skoro“ vepsané a E takový bod AB, že platí $|AE| = |AD|$. Dále pro jednoduchost $\alpha = |\angle DAB|, \beta = |\angle ABC|$. Pak platí: $|\angle DCF| = \frac{1}{2}|\angle DCB| = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $|\angle AED| = 90° - \frac{\alpha}{2}$ poněvadž $\triangle EAD$ je rovnoramenný. Odtud $|\angle DCF| + |\angle DEF| = 180°$ a body C, D, E, F leží na kružnici. $|\angle FDC| = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow |\angle BEC| = 90° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \triangle EBC$ je rovnoramenný $\Rightarrow |EB| = |BC| \Rightarrow |AD| + |BC| = |AB|$. Analogicky pokud $|AE| \leq |AF|$.

2.3 Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čísel $k \in \mathbb{N}$ s vlastností, že $1 + 2 + \cdots + k$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

Řešení. Uvažme posloupnost $\{a_n\}$ definovanou vztahem $a_n = \frac{(n+1)n}{2}$. Jestliže a_k je čtverec, pak je také čtverec číslo a_{4k^2+4k}, neboť platí $a_{4k^2+4k} = \frac{(4k^2+4k)(4k^2+4k+1)}{2} = 4(2k+1)^2 \frac{(k+1)k}{2} = 4(2k+1)^2 a_k$. Proto čísla $a_1, a_8, a_{288}, \ldots$ jsou čtverce (je jich nekonečně mnoho).

2.4 Najděte takovou pětici různých přirozených čísel, pro kterou platí:

(i) libovolná dvě čísla jsou nesoudělná

(ii) součet libovolného počtu čísel je číslo složené.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Uvažme konečnou posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ danou vztahem $a_i = i \cdot n! + 1$. Pro tuto n-tici platí obě podmínky zadání, poněvadž:

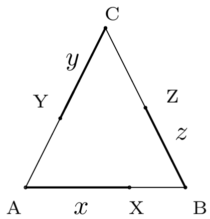
(i) Pokud prvočíslo p dělí a_i, a_j, pak dělí i jejich rozdíl $a_i - a_j = (i-j)n!$, a protože $|i - j| \leq n$ musí p dělit $n!$. Z toho plyne $a_i \equiv 1$ $(mod\ p)$, což je spor.

(ii) Součet k čísel je roven $m \cdot n! + k$, což je číslo složené.

V našem případě splňuje požadavky zadání např. pětice $121, 241, 361, 481, 601$.

2.5 Dokažte, že pro libovolná x, y, $z \in (0,1)$ platí nerovnice $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

Řešení.



Uvažme rovnostranný $\triangle ABC$ o straně 1. Vezměme nyní body X, Y, Z na stranách AB, AC, BC tak, že platí $|AX| = x, |CY| = y, |BZ| = z$. Zřejmě platí nerovnost $S_{AXY} + S_{BXZ} + S_{CYZ} < S_{ABC}$, kde S značí obsah patřičných trojúhelníků. Spočítáme-li nyní obsahy trojúhelníků dostaneme $\frac{1}{2}x(1-y)\sin 60° + \frac{1}{2}z(1-x)\sin 60° + \frac{1}{2}y(1-z)\sin 60° < \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60°$. Po dělení $\frac{1}{2}\sin 60°$ dostaneme požadované.

2.6 Dokažte pro libovolná přirozená $a_1, \ldots, a_n$, a_{n+1} $(a_1 = a_{n+1})$ nerovnost:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$$

Řešení. Označme $\frac{a_i}{a_{i+1}} = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ a navíc $b_{n+1} = 1$. Je zřejmé, že $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$, odtud $\frac{1}{b_i} = \prod_{j\neq i} b_j$. Platí

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j\neq i} b_j \leq \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} b_j^n = \sum_{i=1}^{n+1} b_i^n$$

kde nerovnost je A–G nerovnost a následující rovnost dostaneme okamžitě, pokud si uvědomíme kolikrát se v sumě nalevo vyskytuje b_i^n. Odečtením 1 $(= b_{n+1})$ dostaneme požadované.

2.7 Dokažte, že přirozené číslo $n \geq 4$ je prvočíslo právě tehdy, když $(\forall x, y, u, v \in \mathbb{N})(n = x+y+u+v \Rightarrow xy \neq uv)$.

Řešení. „$\Rightarrow$“ Budeme dokazovat sporem. Nechť p je prvočíslo a existují $x, y, u, v \in \mathbb{N}$ taková, že $p = x+y+u+v, xy = uv$. Platí $xp = x^2+xy+xu+xv = x^2+uv+xu+xv = (x+u)(x+v)$. Oba dva výrazy v závorkách jsou zřejmě menší než p a zároveň je jejich součin p dělitelný, což je spor.

„$\Leftarrow$“ Opět dokážeme sporem. Nechť $n = k\cdot l$ $(k, l \in \mathbb{N}-\{1\})$ a platí $(\forall x, y, u, v \in \mathbb{N})(n = x+y+u+v \Rightarrow xy \neq uv)$. Ovšem pokud zvolíme $x = 1, y = (k-1)(l-1), u = (k-1), v = (l-1)$ zjistíme, že to neplatí.

Pozn. Zadání 4. série obdržíte společně s řešením 2. série.