Řešení 1. série V. ročníku BRKOSu

1.1 Je dán čtverec $ABCD$. Z vrcholu A veďme dvě polopřímky AX a AY, které svírají úhel $45°$. Nechť AX protíná stranu BC v bodě E a uhlopříčku BD v bodě P. Polopřímka AY protíná stranu CD v bodě F a uhlopříčku BD v bodě Q. Dokažte, že $\triangle AEF$ je podobný $\triangle AQP$ a určete poměr jejich obsahů.

Řešení. Využijem vlastnosti obvodových úhlů. $|\angle QAE| = 45° = |\angle QBE|$ odtud plyne, že body A,B,E,Q leží na kružnici. Poněvadž $|\angle ABE| = 90°$ je také $|\angle AQE| = 90°$. Vzhledem k tomu, že $|\angle QAE| = 45°$, $\triangle AQE$ je pravoúhlý rovnoramenný. Odtud zřejmě plyne $|AE| = \sqrt{2}|AQ|$. Analogicky se odvodí vztah $|AF| = \sqrt{2}|AP|$ z faktu, že body A, D, F, P leží na kružnici. Z odvozených vztahů plyne podobnost a také poměr obsahů (kterýžto je 2).

1.2 Do kružnice s poloměrem R je vepsán pravidelný pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$. Dokažte, že $|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| = \sqrt{5}R^2$.

Řešení. Zřejmě $|A_1A_2| = 2R\sin 36° = 4R\cos 18° \sin 18°$ a také $|A_1A_3| = 2R\sin 72° = 2R\cos 18°$ odtud dostáváme $|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| = 8R^2 \sin 18° \cos^2 18°$. K celému důkazu nám chybí "jen" ukázat, že $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Pak již stačí dosadit do předcházejícího vztahu za sin a cos a upravit.

Uvažme $\triangle ABC$ takový, že $|\angle ABC| = |\angle ACB| = 72°$, $|AB| = |AC| = 1$, $|BC| = x$. Dále uvažme osu úhlu u vrcholu B a označme na ní bod D strany AC. Zřejmě $\triangle ABD$ je rovnoramenný a navíc $\triangle ABC \sim \triangle BCD$. Odtud $|AD| = |DB| = |BC| = x$ a $|DC| = x^2$. Nyní vypočítáme x: $1 = |AC| = |AD| + |DC| = x + x^2$. Tato rovnice má kořeny $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, ovšem nás zajímá pouze kladný $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Z $\triangle ABC$ spočítáme $\sin 18° = \frac{\frac{x}{2}}{|AC|} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1.3 Najděte minimální hodnotu výrazu $(x+y)(x+z)$, kde x, y, z jsou kladná čísla splňující rovnost $xyz(x+y+z) = 1$.

Řešení. Ukážeme dva způsoby řešení:

1)Využijeme A-G nerovnosti $(x+y)(x+z) = x(x+y+z) + yz \geq 2\sqrt{xyz(x+y+z)} = 2$

2)Položme $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$ a uvažme $\triangle ABC$ o stranách a, b, c. Z Heronova vzorce pro obsah plyne $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 1$ neboť $s = x+z+y$, $s-a = x$ atd. Z druhé strany platí $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \leq \frac{1}{2}bc$ z čehož dostáváme $(x+z)(x+y) \geq 2$.

Zavěr: Minimální hodnota je 2 (lze ji dostat například volbou $x = \sqrt{2}-1$, $y = z = 1$).

1.4 Nechť x, y, $z \in \mathbb{N}$ a navíc x a y jsou nesoudělná. Jestliže $x^2 + y^2 = z^4$ pak součin xy je dělitelný 7. Dokažte.

Řešení. Využijeme jednoho poznatku o pythagorejských číslech. Poněvadž $(x,y) = 1$ existují $k,l \in \mathbb{N}$ taková, že $x = 2kl$, $y = k^2 - l^2$ (popřípadě naopak), $z^2 = k^2 + l^2$, $(k,l) = 1$. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že 7 nedělí $2kl(k^2 - l^2)$ pak nutně též nedělí kl a tedy $k^2, l^2 \equiv 1,2,4 (mod\ 7)$. Protože však též $k^2 + l^2 \equiv 1,2,4 (mod\ 7)$ dostáváme pouze možnost $k^2 \equiv l^2 (mod\ 7)$ a to je spor, neboť pak $7 | k^2 - l^2$ a tedy $7 | xy$.

1.5 V posloupnosti $1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 31,\ \dots$ je každé číslo, počínaje čtvrtým, součtem tří bezprostředně předcházejících čísel. Dokažte, že pro každé $m \geq 2$ jsou v této posloupnosti právě tři nebo právě čtyři m-ciferná čísla.

Řešení. Označme naši posloupnost $\{a_k\}$. Pak je dána rekurentním vztahem $a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} + a_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Porovnáním vztahů pro a_{k+3} a a_{k+2} dostaneme rovnost $a_{k+3} = 2a_{k+2} - a_{k-1}$ odkud dostáváme odhad $a_{k+3} < 2a_{k+2}$, kterého nyní využijeme.

Nechť $a_k < 10^{m-1} \leq a_{k+1}$ (tzn a_{k+1} je první m-ciferné číslo) pak platí:

1)$a_{k+3} < 2a_{k+2} < 4a_{k+1} < 8a_k < 8 \cdot 10^{m-1} < 10^m \Rightarrow a_{k+3}$ je m-ciferné.

2)$a_{k+5} = \cdots = 7a_{k+1} + 6a_k + 4a_{k-1} > 7a_{k+1} + 3 \cdot 2a_k > 7a_{k+1} + 3a_{k+1} = 10a_{k+1} \geq 10^m \Rightarrow a_{k+5}$ je již $(m+1)$-ciferné.

1.6 Dokažte, že rovnice $3a^2 - 2b^2 = 1$ má v $\mathbb{N}$ nekonečně mnoho řešení.

Řešení. Uvažme číslo $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+1}$ pro $k \in \mathbb{N}_0$. Pro různá k je toto číslo různé, dále toto číslo se dá zapsat ve tvaru $a_k\sqrt{3} - b_k\sqrt{2}$ kde $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ a navíc jsou dvojice $[a_k, b_k]$ různé pro různá k. Pokud si nyní uvědomíme, že $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2k+1}$ lze psát ve tvaru $a_k\sqrt{3} + b_k\sqrt{2}$, pak je nasnadě, že platí $3a_k^2 - 2b_k^2 = (\sqrt{3}a_k - \sqrt{2}b_k)(\sqrt{3}a_k + \sqrt{2}b_k) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+1}(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2k+1} = (3-2)^{2k+1} = 1$.

Dvojice $[a_k, b_k]$ jsou řešením naší rovnice pro $\forall k \in \mathbb{N}$ a tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení.

1.7 Rozhodněte, zda existuje čtyřčlenná rostoucí aritmetická posloupnost, jejíž členy jsou tvaru n^k, kde k, $n \in \mathbb{N}$; k, $n \geq 2$.

Řešení. Existuje, např. 73^2; $5^2 \cdot 73^2$; $7^2 \cdot 73^2$; 73^3.

Mějme aritmetickou posloupnost ${m_1}^{\alpha_1}, {m_2}^{\alpha_2}, \dots, {m_n}^{\alpha_n}$ $(\alpha_1, \dots \alpha_n \geq 2)$,která má diferenci d. Označme s nejmenší společný násobek čísel $\alpha_1, \dots \alpha_n$ a celou posloupnost pronásobme $({m_n}^{\alpha_n} + d)^s$. Dostaneme novou posloupnost, ke které můžeme přidat nový člen, a která má požadovanou vlastnost. Posloupnost vypadá následovně:

$$\left(({m_n}^{\alpha_n} + d)^{\frac{s}{\alpha_1}} m_1\right)^{\alpha_1}, \left(({m_n}^{\alpha_n} + d)^{\frac{s}{\alpha_2}} m_2\right)^{\alpha_2}, \dots, \left(({m_n}^{\alpha_n} + d)^{\frac{s}{\alpha_n}} m_n\right)^{\alpha_n}, ({m_n}^{\alpha_n} + d)^{s+1}$$

s diferecí $d(m_n + d)^s$. Popsaný postup nám ukazuje, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ existuje rostoucí aritmetická posloupnost o k členech.

Milí řešitelé

Protože jsme si odpustili úvodní dopis, píšeme nyní několik organizačních připomínek.

*BR*něnský *KO*respondenční *S*eminář organizují studenti odborné matematiky Přírodovědecké fakulty MU.

Během roku se k vám dostane zadání celkem 6 sérií. Každá série bude obsahovat 7 příkladů různé obtížnosti. Za každý příklad můžete získat 0 − 3 body, velmi zřídkavě i 4 body (za originální řešení). Celkový zisk Z v sérii je pak dán vztahem:

$$Z = \sqrt[s]{\frac{\sum_{i=1}^{7} b_i^s}{7}} \qquad \text{, kde}$$

b_i je počet bodů za i-tý příklad v dané sérii,
$s = 1,2^{5-r}$
$r = p - q$, kde
p je ročník studia q je pravdivostní hodnota výroku „Účastník není studentem matematické třídy“.
Pokud bude $Z \geq 3$ pak dostanete prémiový bod.

Tento systém hodnocení, jak by vám potvrdil každý, kdo zná mocninné průměry, zvýhodňuje řešitele nižších ročníků a studenty nematematických tříd. Ke správnému vyhodnocení tedy potřebujeme o každém řešiteli vědět, který ročník navštěvuje a zda je studentem matematické třídy. Tyto údaje ovšem nemáme k dispozici. Proto prosíme ty, co nám je neposlali, aby tak učinili.

Vraťme se k popisu *BRKOSu*. Poté co vámi napsané řešení opravíme, pošleme vám je zpět. Přidáme vzorová řešení, zadání nové série a výsledkovou tabulku. To jsme popsali způsob jakým si představujeme, že bude *BRKOS* fungovat a nyní k realitě. Na začátek nového ročníku se vyskytly menší problémy(nemáme údaje o všech řešitelích, „tiskařská“ chyba v zadání 2. série) a jeden problém větší(distribuce zadání). Proto jsme se rozhodli k těmto změnám:

(i) posuneme termín odeslání 2. série na 11.11.1995

(ii) po 1. sérii nebudeme posílat výsledkovou listinu. (Pošleme ji zároveň s opravenou 2. sérií.)

Zdůrazněme, že toto jsou úpravy týkající se pouze 1. série. Dále už bude *BRKOS* fungovat podle výše nastíněného schématu.

Doufáme, že se vám náš seminář bude líbit a přejeme mnoho úspěchů nejen při řešení semináře.

Za organizátory *Ondřej Klíma*

P.S. Opět se můžete těšit na závěrečné soustředění.

4 z 5 matematiků doporučují: "ŘEŠTE *BRKOS*"