Řešení 6. série IV. ročníku BRKOSu

6.1 Na šachovnici stojí 8 figur tak, že v každém sloupci a každém řádku stojí po jedné. Dokažte, že na černých polích šachovnice stojí sudý počet figur.

Řešení. Figura stojí na černém poli, jestliže stojí v lichém sloupci na lichém řádku, nebo v sudém sloupci na sudém řádku. Označme počet figur stojících v lichém sloupci na lichém řádku k. Pak v lichých sloupcích na sudém řádku je $4-k$ figur. V sudých sloupcích na lichém řádku je $4-k$ figur. Odtud dostáváme, že v sudých sloupcích na sudém řádku je k figur. Na černých polích stojí tedy $2k$ figur, což je sudý počet.

6.2 Pro která $n \in \mathbb{N}$ $(n > 2)$ je možné seřadit čísla $1, \ldots, n$ na obvod kruhu tak, aby žádné z nich nebylo aritmetickým průměrem svých sousedů.

Řešení. (i) Pro $n = 3$ je vždy číslo 2 mezi 1 a 3 při libovolném sřazení. Tedy seřazení s požadovanou vlastností neexistuje.
(ii) Pro $n = 2k$, $(k \geq 2)$. Rozdělme čísla na dvě skupiny: $1, 2, \ldots, k$ a $k+1, k+2, \ldots, 2k$. Po kruhu je seřaďme tak, že žádné dvě z jedné skupiny nebudou vedle sebe. Takové seřazení má pak požadovanou vlastnost, neboť číslo z první skupiny nemůže být aritmetickým průměrem čísel ze skupiny druhé a naopak.
(iii) Pro $n = 2k+1$, $(k \geq 2)$. Vezměme nějaké seřazení pro $2k$ takové, že čísla $2k$ a 1 jsou vedle sebe, a číslo $2k+1$ dejme mezi $2k$ a 1. Toto seřazení má zřejmě požadovanou vlastnost.
Odpoveď tedy zní: Pro libovolné $(n \geq 4)$ lze čísla seřadit podle podmínek zadání.

6.3 V rovině je dáno n bodů $(n > 4)$, z nichž žádné tři neleží na přímce. Každé dva jsou spojeny červenou nebo modrou úsečkou a to tak, že neexistuje jednobarevný trojúhelník. Dokažte, že pak existuje uzavřená lomená čára skládající se z n červených úseček a procházející všemi body.

Řešení. Úlohu vyřešíme ve dvou částech. V první ukážeme, že $n = 5$ a ve druhé dokážeme existenci lomené čáry.
(i) Budeme dokazovat sporem. Pokud $n \geq 6$ pak existuje jednobarevný trojúhelník. Podpořme toto tvrzení zdůvodněním. Vezměme libovolný bod a označme M množinu těch bodů, s kterými je spojen modrou úsečkou a C množinu těch bodů, s kterými je spojen červenou úsečkou. Zřejmě má jedna z množin alespoň tři prvky, nechť je to například M. Nyní stačí uvážit dvě možnosti: Pokud jsou nějaké dva body z M spojeny modrou úsečkou, pak existuje modrý trojúhelník (tyto dva body a náš původní bod); Pokud jsou všechny body z M spojeny červenou, pak existuje červený trojúhelník (libovolné tři body z M).
(ii) Pokud nyní projdeme úvahy předchozího odstavce pro $n = 5$ zjistíme, že z libovolného bodu, nemá-li existovat jednobarevný trojúhelník, musí vycházet dvě modré a dvě červené úsečky. Vyberme nyní libovolný bod. Když z něj půjdeme po červené úsečce a dorazíme do nějakého bodu, můžeme z něj opět po červené odejít. Po několika krocích se vrátíme do výchozího bodu. Tato cesta obsahuje alespoň 4 body, neboť 2 nemůže a 3 odpovídají červenému trojúhelníku. Kdyby však obsahovala 4 body, pak by nebylo možné spojit 5. bod s žádným bodem červenou úsečkou. Existuje tedy uzavřená lomená červená čára, délky 5 a procházející všemi body.

6.4 Ze středu O kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC jsou spušťeny kolmice OA', OB', OC' na strany BC, AC, AB. Označíme-li R a r po řadě střed opsané a vepsané kružnice trojúhelníka ABC, pak dokažte, že platí

$$R + r = |OA'| + |OB'| + |OC'|$$

Řešení. Označme S obsah trojúhelníka, a, b, c jeho strany a dále $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
Připomeňme co nám říká Ptolemayova věta: Je-li $ABCD$ tětivový čtyřúhelník pak platí $|AC||BD| = |AB||CD| + |BC||AD|$.

Nyní k našemu příkladu. Čtyřúhelník $AC'OB'$ je tětivový a tedy platí $|AO||B'C'| = |AC'||OB'| + |C'O||AB'|$, přičemž B' a C' jsou středy stran a $|AO| = R$. Rovnost lze tedy psát takto: $R\frac{a}{2} = \frac{b}{2}|OC'| + \frac{c}{2}|OB'|$. Analogicky platí $R\frac{b}{2} = \frac{c}{2}|OA'| + \frac{a}{2}|OC'|$, $R\frac{c}{2} = \frac{a}{2}|OB'| + \frac{b}{2}|OA'|$. Sečtením dostaneme $Rp = p(|OC'|+|OB'|+|OC'|) - (\frac{a}{2}|OA'| + \frac{b}{2}|OB'| + \frac{c}{2}|OC'|)$. Protože $\frac{a}{2}|OA'| + \frac{b}{2}|OB'| + \frac{c}{2}|OC'| = S = pr$ dostaneme po dělení p požadovanou rovnost.
Poznámka: Pokud by byl trojúhelník tupoúhlý, s tupým úhlem při vrcholu A, pak platí $R + r = |OC'| + |OB'| - |OA'|$.

6.5 Dokažte, že mezi $n+1$ libovolně zvolenými různými reálnými čísly ($n \geq 2$) je možné vybrat dvě čísla x, y tak, že platí

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$$

Řešení. Mějme $n+1$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ navzájem různých. Zřejmě existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ taková, že $\mathrm{tg}\alpha_i = x_i$. Máme tedy ukázat, že existují α, $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}\}$ taková, že $0 < tg(\alpha - \beta) < tg\frac{\pi}{n}$. Podle Dirichletova principu existuje dvojice α, β tak, že $|\alpha - \beta| < \frac{\pi}{n}$ a zřejmě je lze vybrat tak, že $\alpha > \beta$.

6.6 Nechť $a + b + c = 1$ a a, b, c jsou stranamy nějakého trojúhelníka. Dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$$

Řešení. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá $a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$, $c < \frac{1}{2}$. Odtud $a^2 < \frac{1}{2}a$, $b^2 < \frac{1}{2}b$, $c^2 < \frac{1}{2}c$ a sečtením těchto nerovností dostaneme $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}$.

6.7 Řešte v oboru $\mathbb{N}$ rovnici

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1995}$$

Řešení. Předpokládejme, že úloha má řešení. Vzhledem k tomu, že rovnice je symetrická má i řešení takové, že $s = x - y \geq 0$, $(s \in \mathbb{N})$. Pak $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y = s$ a odtud $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{s}{\sqrt{1995}}$. Po sečtením s předchozím dostaneme $2\sqrt{x} = \sqrt{1995} + \frac{s}{\sqrt{1995}}$. Umocněním této rovnosti dostáváme podmínku $\frac{s^2}{1995} \in \mathbb{N}$. Vzhledem k tomu, že $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x} - \sqrt{y}$ musí být $s < 1995$. Pro s má tedy platit: $s \geq 0$; $s \in \mathbb{N}$; $s < 1995$; $1995|s^2$ a je tedy zřejmé, že takové s neexistuje a úloha nemá řešení.
