Řešení 5. série IV. ročníku BRKOSu

5.1 V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ prochází uhlopříčka BD středem N uhlopříčky AC. Dokažte, že

$$2|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$$

Řešení. Z cosinových vět pro trojúhelníky ABN a BNC dostaneme $|AB|^2 = |AN|^2 + |NB|^2 - 2|AN||NB|\cos|\angle ANB|$, $|BC|^2 = |NC|^2 + |NB|^2 + 2|NC||NB|\cos|\angle ANB|$. Protože N je střed AC je $|AN| = |NC|$, tudíž sečtením dostaneme $|AB|^2 + |BC|^2 = 2|NB|^2 + 2|AN|^2$. Analogicky $|CD|^2 + |DA|^2 = 2|DN|^2 + 2|AN|^2$.Z mocnosti bodu N ke kružnici opsané čtyřúhelníku $ABCD$ máme $|AN|^2 = |AN||NC| = |BN||ND|$. Celkem tedy dostáváme $2|BD|^2 = 2(|BN| + |ND|)^2 = 2|BN|^2 + 4|BN||ND| + 2|ND|^2 = 2|NB|^2 + 4|AN|^2 + 2|ND|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$.

5.2 Nechť v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že $|CD| = |AD| + |BC|$. Dokažte, že pak průsečík os úhlů DAB a ABC leží na CD.

Řešení. Označme $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$. Nechť $E \in CD$ a platí $|DE| = |AD|$. Potom $|\angle DAE| = |\angle DEA|$ a protože $|\angle ADE| = 180 - \beta$ dostáváme $|\angle DAE| = |\angle DEA| = \frac{\beta}{2}$. Obdobně platí $|\angle CEB| = |\angle CBE| = \frac{\alpha}{2}$. Předpokládejme dále (bez újmy na obecnosti), že $\beta < \alpha$. Označme BF osu úhlu ABC, přičemž $F \in CD$. Pak $|\angle ABF| = \frac{\beta}{2}$. $ABFE$ je tětivový čtyřúhelník, neboť $|\angle AEF| = 180 - \frac{\beta}{2}$. Dále platí $|\angle DAF| = |\angle DAE| + |\angle EAF| = \frac{\beta}{2} + |\angle EBF| = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Z čehož dostáváme, že AF je osa úhlu DAB. (Pokud by bylo $\beta = \alpha$ pak $E = F$, AE a BE osy.)

5.3 Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice o poloměru R, přičemž platí $|AB| = |CD| = |EF| = R$. Dokažte, že středy stran BC, DE, FA tvoří rovnostranný trojúhelník.

Řešení. Označme K, L, M středy stran BC, DE, FA; O střed kružnice opsané. Předpokládejme, že $\triangle KLM$ je rovnostraný. Potom dokážeme, že středy stran BC, DE', $F'A$ šestiúhelníka $ABCDE'F'$, ve kterém získáme body E', F' z E, F otočením kolem O o nějaký úhel φ, tvoří taktéž rovnostraný trojúhelník. Tím bude vše dokázáno, neboť pro pravidelný šestiúhelník $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ tvoří středy stran B_0C_0, D_0E_0, F_0A_0 zřejmě rovnostraný trojúhelník, a libovolný šestiúhelník dostaneme z pravidelného otočením $\triangle OCD$ a $\triangle OEF$ kolem bodu O.

Nechť L' a M' jsou středy DE' a $F'A$. Uvažme nyní otočení o 60^o. Vektor $\overrightarrow{EE'}$ přechází v vektor $\overrightarrow{FF'}$. Poněvadž $\overrightarrow{LL'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EE'}$ a $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FF'}$ vektor $\overrightarrow{LL'}$ přechází v vektor $\overrightarrow{MM'}$. Z předpokladu, že $\triangle KLM$ je rovnostraný plyne, že vektor $\overrightarrow{KL}$ přechází v vektor $\overrightarrow{KM}$. Z čehož plyne: vektor $\overrightarrow{KL'} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LL'}$ přechází v vektor $\overrightarrow{KM'} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MM'}$. Odtud plyne, že $\triangle KL'M'$ je rovnostraný.

5.4 Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel x, y, z takových, že $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ platí nerovnost

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Řešení. Podle Petra Kaňovského.
$\forall t \in [0,1)$ platí $t(t - \frac{\sqrt{3}}{3})^2(\frac{3\sqrt{3}}{2}t + 3) \geq 0$. Úpravou této nerovnosti dostaneme $\forall t \in [0,1) : \frac{t}{1-t^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}t^2$. Dosadíme-li do této nerovnosti postupně x, y, z a sečteme dostaneme vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ požadovanou nerovnost.

5.5 Nekonečná posloupnost a_0, $a_1, \ldots$ je zadána takto: $a_0 = 0$; $a_n = f(a_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, kde $f(x)$ je mnohočlen s celými koeficienty, přičemž $f(x) \geq 0$ pro všechna nezáporná x. Dokažte, že pro libovolné m, $k \in N$ platí $(a_m, a_k) = a_{(m,k)}$, kde (m,k) značí největší společný dělitel čísel m a k.

Řešení. Lemma: Nechť posloupnost celých čísel $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots$ splňuje $(a_m, a_k) = (a_{m-k}, a_k)$ pro libovolné
$m, k \in N, m > k \geq 0$. Pak platí $(a_m, a_k) = a_d$ kde $d = (m, k)$.

Důkaz: Pouze naznačíme. Jde o analogii Euklidova algoritmu. Uvažme "posloupnost" $\{m, k\} \to \{m-k, k\} \to \dots \to \{d, 0\}$. Pak $(a_m, a_k) = (a_{m-k}, a_k) = \dots = (a_d, a_0)$ což je rovno a_d.

Nyní k našemu příkladu. Označme $f(f \dots (f(x)) \dots) = f_n(x)$. To je zřejmě mnohočlen s celými koeficienty, přičemž $a_m = f_m(a_0)$ a $a_m = f_{m-k}(a_k)$ pro $m > k$. Zřejmě $f_n(x) = f_n(0) + xg_n(x) = a_n + xg_n(x)$ kde g_n je mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Nyní platí $(a_m, a_k) = (f_{m-k}(a_k), a_k) = (a_{m-k} + a_k g_{m-k}(a_k), a_k) = (a_{m-k}, a_k)$ a podle Lemma tedy $(a_m, a_k) = a_{(m,k)}$.

5.6 Nechť a, $m \in N$, $m > 1$, a není dělitelné osmi. Dokažte, že číslo $a^m + a + 1$ není druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Rozdělíme na dva případy.
(i) $m = 2n$ pak $(a^n)^2 < a^{2n} + a + 1 < a^{2n} + 2a^n + 1 = (a^n + 1)^2$.
(ii) $m = 2n + 1$. Protože libovolné číslo umocněno na druhou dává po dělení 8 zbytek 0 nebo 1, a protože $a^m + a$ je vždy sudé, platí $8 | a^m + a$. Z čehož vzhledem k předpokladu plyne $8 | a^{2n} + 1$. To je spor, neboť a^{2n} dává po dělení 8 zbytek 0 nebo 1.

5.7 Mějme tabulku $m \times n$ složenou z m sloupců a n řádků, $m > n$. Do každého políčka tabulky je vepsána nejvýše jedna hvězdička tak, že v každém sloupci je alespoň jedna. Dokažte, že existuje hvězdička taková, že v řádku, ve kterém leží, je více hvězdiček než v sloupci, ve kterém leží.

Řešení. Sestrojme dvě nové tabulky, modrou a červenou. Do modré vpišme na místo každé hvězdičky v původní tabulce převrácenou hodnotu počtu hvězdiček ležících v jejím sloupci (včetně ní), do červené pak převrácenou hodnotu počtu hvězdiček v jejím řádku. Součet čísel v libovolném sloupci modré tabulky pak bude 1, v libovolném řádku červené tabulky 1 nebo 0 (pokud v daném řádku nebude v původní tabulce žádná hvězdička). Součet čísel v modré tabulce je tedy m, v červené nejvýše n, $m > n$, je tedy v modré tabulce na stejném místě jako v červené tabulce větší číslo. To ale znamená, že ve sloupci odpovídající hvězdičky v původní tabulce je méně hvězdiček než v jejím řádku.
