Řešení 4. série IV. ročníku BRKOSu

4.1 Přirozené číslo n nazveme dokonalým, jestliže je rovno součtu svých přirozených dělitelů menších než n (např. 28=1+2+4+7+14). Dokažte, že liché dokonalé číslo (pokud existuje) nemůže být dělitelné 105.

Řešení. Nechť $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, pak součet dělitelů čísla n je roven $S(n) = (1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k})$. Podmínku dokonalosti čísla n lze vyjádřit jako $S(n) = 2n$. Je-li n liché, pak jsou všechna p_i lichá a protože je $S(n) = 2n$ jsou α_i až na jedno sudá. Řekněme, že liché je např. $\alpha_1 = 2l+1$. Pak $(1 + p_1 + \cdots p_1^{2l+1}) = (1 + p_1)(1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{2l})$ a tedy $p_1 \neq 3, 7$ neboť pak by byl $S(n)$ dělitelný čtyřmi. Nechť nyní mezi čísli $p_1, \ldots, p_k$ jsou čísla 3, 5, 7, přičemž $p_1 \neq 3, 7$. Pak je

$$\frac{S(n)}{n} \geq \left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}\right) \geq \left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}\right) > 2$$

což je spor s tím, že $S(n) = 2n$.

4.2 Pro libovolné $n \in N$ označme $f(n) = n + [\sqrt{n}]$. Dokažte, že pro jakékoliv přirozené m obsahuje posloupnost m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f^3(m), \ldots$ alespoň jednu druhou mocninu přirozeného čísla.

Řešení. Označíme-li $k = [\sqrt{m}]$ pak $m = k^2 + j$ pro vhodné j, $0 \leq j \leq 2k$. V případě $0 \leq j \leq k$ ukažme indukcí pro $n = 0, 1, \ldots j$ rovnost $f^{2r} = (k + r)^2 + j - r$:
i) $r = 0$: $f^0(m) = m = k^2 + j$
ii) Nechť platí $f^{2r-2}(m) = (k + r - 1)^2 + j - r + 1$. Pak
$f^{2r-1}(m) = (k + r - 1)^2 + j - r + 1 + k + r - 1 = (k + r - 1)^2 + j + k$
$f^{2r}(m) = (k+r-1)^2+j+k+k+r-1 = (k+r)^2-2k-2r+1+j+2k+r-1 = (k+r)^2+j-r$

Pak ovšem pro $r = j$ je $f^{2j}(m) = (k + j)^2$, tedy čtverec. V případě $k < j \leq 2k$ záměnou čísla m číslem $f(m)$ přejdeme k prvnímu případu.

4.3 Nechť $F(x)$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Víme, že pro libovolné celé n je číslo $F(n)$ dělitelné jedním z celých čísel a_1, $a_2, \ldots, a_m$. Dokažte, že lze z těchto čísel vybrat takové, že jím budou dělitelné všechny hodnoty $F(n)$ pro libovolné přirozené n.

Řešení. Předpokládejme naopak, že ke každému a_i existuje číslo b_i takové, že a_i nedělí $F(b_i)$, tedy existují prvočísla p_i (ne nutně různá) taková, že $p_i^{r_i}$ dělí a_i, ale nedělí $F(b_i)$. V posloupnosti $p_1^{r_1}, \ldots, p_m^{r_m}$ vyškrtněme všechny násobné výskyty prvočísel a to tak, že každé prvočíslo ponecháme v nejnižší mocnině, ve které se vyskytuje v původní posloupnosti. Dostaneme tak posloupnost $p_{j_1}^{r_{j_1}}, \ldots, p_{j_t}^{r_{j_t}}$, $t \leq m$. Pak ovšem dle Čínské zbytkové věty má následující soustava konguruencí řešení:

$$x \equiv b_{j_i} \pmod{p_{j_i}^{r_{j_i}}}, \quad i = 1, \ldots, t$$

Ale to znamená, že x splňuje i soustavu

$$F(x) \equiv F(b_{j_i}) \pmod{p_{j_i}^{r_{j_i}}}, \quad i = 1, \ldots, t$$

a tedy $p_{j_i}^{r_{j_i}}$ nedělí $F(x)$ pro $i = 1, \ldots, t$. Ovšem podle výběru posloupnosti $p_{j_1}^{r_{j_1}}, \ldots, p_{j_t}^{r_{j_t}}$ je každé a_i, $i = 1, \ldots, m$ dělitelné některým členem uvedené posloupnosti a tedy nemůže dělit $F(x)$, což je spor.

4.4* Nalezněte všechna přirozená čísla n, pro která platí: pro všechna přirozená r nesoudělná s $\varphi(n)$ [1] je zobrazení $f : \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ dané předpisem $f(x) \equiv x^r \pmod{n}$ bijektivní. [2]

Řešení. Hledaná čísla jsou právě čísla, nedělitelná žádnou druhou mocninou. Že čísla dělitelná nějakou druhou mocninou přirozeného čísla, řekněme m, nesplňují podmínku v úloze je zřejmé (pro $r > 2$ nemůže $f(x)$ pro libovolné x z def. oboru patřit do zbytkové třídy určené číslem m, tedy příslušné zobrazení f nemůže být bijektivní). Nyní ukažme, že pro všechna čísla $n = p_1 \cdots p_k$, kde $p_1, \ldots, p_k$

[1] $\varphi(n)$ je Eulerova funkce udávající počet přirozených čísel nesoudělných s n a menších než n
[2] Příklady označené $\star$ jsou originální

jsou prvočísla, je pro lib. r nesoudělné s $\varphi(n)$ zobrazení f bijektivní. Ukážeme to tak, že najdeme zobrazení g takové, že zobrazení $g \circ f$ bude identitou na množině $\{0, 1, \dots, n-1\}$, tedy bijekcí a tedy obě skládaná zobrazení f a g budou také bijekcemi. Neboť $(r, \phi(n)) = 1$, existuje přirozené u tak, že $ur \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$ (postupným pronásobením čísla r čísly $1, \dots, \phi(n)$, dostaneme $\phi(n)$ po dvou nekonguruentních čísel modulo $\phi(n)$). Nyní nechť $x \in \{0, \dots, n-1\}$, $(x, n) = 1$. Pak dle Eulerovy věty je $(x^r)^u = x^{ru} = x^{v\phi(n)+1} \equiv x \pmod{n}$. pro $x = a \prod_{i \in J} p_i$, kde $(a, n) = 1$, $\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, k\}$, označme ještě $K := \{1, \dots, k\} \setminus J$. Pak $(\prod_{i \in J} p_i)^{ur-1} = (\prod_{i \in J} p_i)^{v\phi(n)} = (\prod_{i \in J} p_i)^{v\phi(\prod_{i \in J} p_i)\phi(\prod_{i \in K} p_i)} \equiv 1$ $(\mathrm{mod} \prod_{i \in K} p_i)$. Po vynásobení konguruence číslem $\prod_{i \in J} p_i$ dostáváme $(\prod_{i \in J} p_i)^{ur} \equiv (\prod_{i \in J} p_i) \pmod{n}$. Celkem pak $x^{ru} = (a(\prod_{i \in J} p_i))^{ru} = a^{ru}(\prod_{i \in J} p_i)^{ru} \equiv a(\prod_{i \in J} p_i) = x \pmod{n}$.

4.5 Dokažte, že pro libovolnou dvojici trojúhelníků s úhly α, β, γ resp. α_1, β_1, γ_1 platí:

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta + \mathrm{cotg}\gamma$$

Řešení. Uvažme α, β, γ pevné a zkoumejme výraz $A = (\cos \alpha_1)(\sin \beta)(\sin \gamma) + (\cos \beta_1)(\sin \alpha)(\sin \gamma) + (\cos \gamma_1)(\sin \alpha)(\sin \beta)$. Zavedeme nyní vektory $|\overrightarrow{a}| = \sin \alpha$, $|\overrightarrow{b}| = \sin \beta$, $|\overrightarrow{c}| = \sin \gamma$ svírající po dvojicích úhly α_1, β_1, γ_1 tak aby bylo A rovno kombinaci následujích skalárních součinů: $A = -(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = 1/2(\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2)$. Výraz A bude maximální, pokud $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2 = 0$, tedy $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$. Protože vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří trojúhelník s úhly α, β, γ, tak A bude maximální právě pro $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$. Tedy $A \leq (\cos \alpha_1)(\sin \beta)(\sin \gamma) + (\cos \beta_1)(\sin \alpha)(\sin \gamma) + (\cos \gamma_1)(\sin \alpha)(\sin \beta)$ což je ekvivalentní s nerovností v zadání.

4.6 Na strannách $\triangle ABC$ jsou vně sestrojeny podobné $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$, $\triangle A_1BC$ tak, že $|\angle C_1AB| = |\angle A_1BC| = |\angle B_1CA|$ a $|\angle AC_1B| = |\angle BA_1C| = |\angle cB_1A|$. Dokažte, že $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle ABC$ mají shodná těžiště.

Řešení. Uvažme zobrazení P na volných vektorech, které se skládá z otáčení o úhel ϕ a stejnolehlosti s koeficientem $k = AC_1/AB = BA_1/BC = CB_1/CA$. pak zřejmě platí: $\overrightarrow{0}$=P($\overrightarrow{0}$)=P($\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{BC}$+$\overrightarrow{CA}$)=-P($\overrightarrow{AB}$)+ P($\overrightarrow{BC}$)+P($\overrightarrow{CA}$)= $\overrightarrow{AC_1}$+$\overrightarrow{AC_1}$+$\overrightarrow{BA_1}$+$\overrightarrow{CB_1}$. Označíme-li nyní T, resp. T_1, těžiště $\triangle ABC$, resp. $\triangle A_1B_1C_1$, pak $\overrightarrow{AT} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 1/3(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1}) = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}) = 1/3(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}) = \overrightarrow{AT_1}$, tedy $T = T_1$.

4.7* Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB a kladné reálné λ. Konstrukčně nalezněte pevný bod zobrazení $\mathcal{Z} = \mathcal{R}_{C,90^\circ} \circ \mathcal{H}_{A;\lambda}$ (rotace se středem C o 90° po stejnolehlosti se středem A a koeficientem λ).

Řešení. Úloha je inspirována řešením F.Kršky příkladu 2.3. Sestrojme čtverec ABDE se středem C. Na polopřímkách AE a AB sestrojme body P, Q tak, že $|AE|/|PA| = |AB|/|QA| = \lambda$. Nechť H je pata kolmice spuštěné z A na úsešku PB. Uvážíme nyní zobrazení $\mathcal{Z}' = \mathcal{R}_{H,90^\circ} \circ \mathcal{H}_{H;\lambda}$. Označíme-li ještě Y průsečík AH a BC, tak z podobnosti trojúhelníků PAH, ABH a BHY a toho, že $Z'(Q) \in Z'(A)Z'(B)$, dostáváme $Z'(P) = A$, $Z'(A) = B$ a $Z'(Q) = D$, zřejmě však i $Z(P) = A$, $Z(A) = B$ a $Z(Q) = D$, tedy $Z = Z'$ a protože H je pevným bodem Z' je i pevným bodem Z.