Řešení 3. série IV. ročníku BRKOSu

3.1 V této úloze uvažujme šachové turnaje, ve kterých hraje každý hráč s každým právě jednu partii. Turnaj nazveme rovinové, jestiže v libovolné dvojici hráčů ten z nich, který nezískal více bodů než druhý, nevyhrál ve vzájemném utkání (za výhru dostane hráč jeden bod, za remízu půl, za prohru nic). Ukažte, že pro libovolný turnaj, existuje rovinové turnaj, ve kterém každý z hráčů získal stejně bodů jako v tomto turnaji.

Řešení. Uvažme libovolný turnaj, který není rovinové a vyberme dvojici hráčů A, B takových, že A získal více bodů než B, ale prohrál ve vzájemném zápase. Pak ale musí existovat hráč C, se kterým má A lepší bilanci než B. Změňme výsledky zápasů následovně: A remizoval s B a A si o půl bodu pohorší bilanci s C (z výhry, resp. remízy na remízu, resp. prohru), B si o půl bodu polepší bilanci s C. Dostáváme turnaj, ve kterém získali všichni hráči stejně bodů, ale počet remíz se zvětšil alespoň o jednu. Po konečném počtu kroků tedy dostame rovinové turnaj se stejným rozložením bodů jako původní turnaj.

3.2 Do políček čtvercové tabulky 50×50 jsou vepsána čísla 1 a -1 tak, že absolutní hodnota součtu čísel v tabulce nepřevyšuje 100. Dokažte, že absolutní hodnota součtu čísel v některém čtverci 25×25 nepřevyšuje 25.

▷ Dokazujme sporem. Ozmačme nejprve sloupce tabulky ${}_{1}, \dots, {}_{50}$, řádky ${}^{1}, \dots, {}^{50}$, na čtverce v tabulce se budeme odkazovat uvedením sloupců a řádků ohraničujících daný čtverec. Rozdělme nyní tabulku na čtyři shodné čtverce. Nechť absolutní hodnota součtu čísel v každém z nich převyšuje 25. Pak nutně mají součty čísel v některých čtvercích opačná znaménka (jinak by celkový součet přesáhl 100) a některé takové čtverce spolu sousedí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou to čtverce $[{}_{1}, {}_{25}, {}^{1}, {}^{25}]$ a $[{}_{1}, {}_{25}, {}^{26}, {}^{50}]$. Uvažme posloupnost čtverců $[{}_{i}, {}_{i+24}, {}^{1}, {}^{25}]$, $i = 1, \dots, 26$. Součet čísel v sousedních čtvercích posloupnosti se liší nejvýše o 50, neb tyto čtverce se různí maximálně v padesáti číslech (dva řádky). Protože absolutní hodnota součtu čísel v prvním a posledním čtverci převyšuje 25 a součty mají opačná znaménka, existuje v posloupnosti nutně čtverec, pro nejž je absolutní hodnota součtu čísel v něm nejvýše 25.

3.3 Na kružnici je rozmístěno 101 hmotných bodů, jejichž hmotnosti jsou přirozená čísla (zdravíme fyziky) a dohromady váží 300. Dokažte, že na kružnici je v řadě několik hmotných bodů, jejichž úhrná hmotnost je právě 200.

Řešení. Označme hmotnosti bodů ležících na kružnici po řadě $m_1, m_2, \dots, m_{101}$ a uvažme součty m_1, $m_1 + m_2, \dots,$
$m_1 + \dots + m_n$ bodů ležících vedle sebe. Podle Dirichletova principu mají dva z těchto součtů stejný zbytek po dělení 100 a tedy jejich rozdíl, což je opět nějaký součet bodů ležících vedle sebe je dělitelný 100 a je roven 100 nebo 200 (libovolné rozdíly z naší posloupnosti leží ostře mezi 0 a 300). Pokud je to 200 jsme hotovi, pokud 100 jsou hledané body právě ty, které se nepodílejí svými hmotnostmi na součtu.

3.4 V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Některé z nich spojíme úsečkami tak, aby přitom nevznikl žádný trojúhelník s vrcholy v daných bodech. Určete maximální počet $P(n)$ úseček, které jsme mohli takto zakreslit.

Řešení. Vcelku snadno se přijde na to, že $P(n) \geq [\frac{n^2}{4}]$ [1] (rozdělíme body do dvou skupin tak, aby se počet bodů ve skupinách lišil maximálně o jedna, tzn. na „poloviny“, a každý bod z jedné skupiny pospojujeme se všemi body druhé skupiny). Nyní ukažme $P(n) \leq [\frac{n^2}{4}]$. Sporem. Nechť n_0 je nejmenší přirozené číslo, které porušuje nerovnost, tedy $P(n_0) > [\frac{n_0^2}{4}]$. Zřejmě $n_0 \neq 1, 2$. Mějme tedy v rovině pospojováno n_0 bodů $P(n_0)$ úsečkami tak, že žádné tři úsečky netvoří trojúhelník. Vyberme si dva body spojené úsečkou. Z libovolného z ostatních bodů nemohou vést úsečky k oběma vybraným bodům, jinak by vznikl trojúhelník. Z ostatních bodů vede tedy k vybraným nejvýše $n_0 - 2$ úseček.

[1] [x] značí celou část čísla x

Nyní odeberme tyto dva body spolu s $n_0 - 1$ úsečkami do nich směřujícími. Dostáváme rozmístění $P(n_0) - (n_0 - 1)$ úseček bez trojúhelníků mezi $n_0 - 2$ body. Je tedy $P(n_0 - 2) \geq P(n_0) - n_0 + 1 > [\frac{n_0^2}{4}] - n_0 + 1 = [\frac{n_0^2}{4} - n_0 + 1] = [\frac{(n_0-2)^2}{4}]$ což je spor s minimalitou n_0.

3.5 Definujme zobrazení P množiny celých čísel do sebe takto:

i) pro přirozené číslo n, které je zapsané dekadickými ciframi $c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$ položíme
$P(n) = c_0 - c_1 + \dots + (-1)^k c_k$

ii) P(0)=0

iii) pro záporné celé n položíme $P(n) = -P(-n)$

Určete $P(P(8^{24} - 7^{24}))$.

Řešení. Lemma. $P(n) \equiv n \pmod{11}$

i) $n \in N$; $n = c_k(11-1)^k + c_{k-1}(11-1)^{k-1} + \dots + c_0 \equiv c_k(-1)^k + \dots + c_0 = P(n) \pmod{11}$

ii) $P(0) = 0 \equiv 0 \pmod{11}$

iii) $P(n) = -P(-n) \equiv -(-n) = n \pmod{11}$

Nyní $8^{24} - 7^{24} < 10^{24} \Rightarrow |P(8^{24} - 7^{24})| \leq 12 \cdot 9 = 108 \Rightarrow |P(P(8^{24} - 7^{24}))| \leq 9$. Z malé Fermatovy věty je $8^{10} \equiv 7^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 8^{24} - 7^{24} \equiv 8^4 - 7^4 \equiv 1 \pmod{11}$ a odtud dle Lemmatu $P(P(8^{24} - 7^{24})) \equiv 1 \pmod{11}$ a vzhledem k $|P(P(8^{24} - 7^{24}))| \leq 9$ dostáváme $P(P(8^{24} - 7^{24})) = 1$.

3.6 Pro přirozené $n \geq 2$ dokažte:
$(1 + \frac{1}{2^3})(1 + \frac{1}{3^3}) \cdots (1 + \frac{1}{n^3}) \leq \frac{27}{22}$

Řešení. Matematickou indukcí lze snadno dokázat tvrzení $(1 + \frac{1}{2^3}) \cdots (1 + \frac{1}{n^3}) \leq \frac{27}{22}(1 - \frac{1}{2n(n+1)})$
Pozn: Bylo by zajímavé určit $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2^3}) \cdots (1 + \frac{1}{n^3})$.

3.7 Dokažte, že pro a, $b \in R^+$ platí za předpokladu $ab = 1$ následující nerovnost:
$2\sqrt{a^3 + b^3} + 1 \leq a(a+1) + b(b+1)$.

Řešení. Podle AG nerovnosti:

$$\sqrt{a^3 + b^3} = \sqrt{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \leq \frac{a + b + a^2 - ab + b^2}{2} = \frac{a(a+1) + b(b+1) - ab}{2}$$

což po vynásobení dvěma a dosazení $ab = 1$ dává požadované.