Řešení 2. série IV. ročníku BRKOSu

2.1 Dokažte, že rovnice $(2x)^{2x} - 1 = y^{z+1}$ nemá řešení v N.

♢ Vzhledem ke špatné kvalitě zadání, někteří z vás špatně přečetli mocnitele y na pravé straně rovnice. Je jím z, nikoliv x. Jaroslav K. dokonce mocnitele dešifroval jako $2+1$. Ač je úloha s x v exponentu na pravé straně speciálním případem úlohy s exponentem z, její přímé řešení je těžší než řešení obecnější úlohy se z.

Všimněme si, že $((2x)^x + 1\,,\,(2x)^x - 1) = 1$. Aby daná rovinice tedy měla řešení v N, musela by být obě čísla $(z+1)$.mocninami. Ale druhé či vyšší mocniny různých přirozených čísel se liší o více než dvě: pro a, $d \in N$ je $(a+d)^{z+1} - a^{z+1} = d[(a+d)^z + \cdots + a^z] \geq 3$. Tedy rovnice nemá řešení v N.

2.2 AB a CD jsou průměry jedné kružnice. Z bodu M této kružnice jsou spuštěny kolmice MP a MQ na přímky AB a CD. Dokažte, že délka úsečky PQ nezávisí od výběru bodu M.

♣ Dle Petra Honzíka. Nechť S je středem dané kružnice a bod X je středem MS. Podle Thaletovy věty jsou potom body P, Q průsečíky kružnice $k(X; |XS|)$ a úseček AB a CD. Tedy $\angle PSQ$ je obvodovým úhlem kružnice k. Odtud $|PQ|$ nezávisí od výběru bodu M (poloměr k se nemění).

2.3 Je dán čtverec $ABCD$. Body P a Q leží na stranách AB a BC tak, že $|BP| = |BQ|$. Nechť H je pata výšky spuštěné z B na úsečku PC. Dokažte, že $|\angle DHQ| = 90°$.

♢ Volně dle Pavla Stehlíka. Označme X průsečík přímek BH a AD. Snadno nahlédneme, že čtyřúhelník $HXDC$ je tětivový (označme např. $|\angle PCB| = \beta$, pak $|\angle PCD| = |\angle HBC| = 90° - \beta$, a $|\angle PBH| = \beta$, tedy $|\angle BXA| = 90° - \beta$ a $|\angle BXD| = 90° + \beta$). Kružnice opsaná $HXDC$ prochází však i bodem Q, neb $\triangle ABX \cong \triangle PBC$ a tedy $XQCD$ je obdélník. Tedy je i $HQCD$ tětivový a $|\angle DHQ| = 90°$.

2.4 Zjistěte, zda existuje $n \in N$ pro které jsou 2^{n+1} a $2^{n-1}(2^n - 1)$ třetími mocninami.

♣ 2^{n+1} třetí mocnina $\Rightarrow 3|n+1$, dále jsou 2^{n-1} a $2^n - 1$ nesoudělná, tedy má-li být jejich součin třetí mocninou, musí být třetí mocninou i 2^{n-1}, tedy $3|n-1$, spor.

2.5 Mějme konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ pro niž platí $a_1 = a_n = 0$ a $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$ pro všechna $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Dokažte, že mezi čísly $a_1, \ldots, a_n$ není kladné.

♢ Nechť a_k, $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, je první kladné číslo v posloupnosti. Pak $a_{k+1} \geq 2a_k - a_{k-1} > a_k$. Jestliže máme v posloupnosti za sebou dvě kladná čísla $a_{i-1} < a_i$, pak je $a_{i+1} \geq a_i + (a_i - a_{i-1}) > a_i$. Tedy by bylo i poslední číslo v posloupnosti kladné, spor. V posloupnosti není kladných čísel.

2.6 Je známé, že $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \cdots \cdot \operatorname{tg}\alpha_n = 1$ a že Hliník se odstěhoval do Humpolce. Najděte největší možnou hodnotu výrazu $\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \cdots \cdot \sin\alpha_n$.

♠ Podle Filipa Kršky. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin\alpha_1 \cdots \sin\alpha_n = \cos\alpha_1 \cdots \cos\alpha_n \Rightarrow$
$\sin\alpha_1 \cdots \sin\alpha_n = \sqrt{\sin\alpha_1 \cdots \sin\alpha_n \cos\alpha_1 \cdots \cos\alpha_n} = \sqrt{(\frac{1}{2})^n}\sqrt{\sin 2\alpha_1 \cdots \sin 2\alpha_n}$
$\sqrt{\sin 2\alpha_1 \cdots \sin 2\alpha_n} = \max = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 45°$. Maximální hodnota výrazu je $\sqrt{(\frac{1}{2})^n}$.

2.7 Kladná čísla a, b, c, A, B, C splňují vztahy $a+A = b+B = c+C = K$. Dokažte, že $aB+bC+cA < K^2$.

♡ **i)** $a \geq C$; $aB + bC + cA \leq CB + bC + cA < KC + cK = K^2$

ii) $a > C$; $aB + bC + cA < aB + ba + cA < aK + KA = K^2$
