Řešení 1. série IV. ročníku BRKOSu

1.1 Dokažte, že pro libovolná lichá čísla a, b, $c \in Z$ nemá rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ řešení v Q.

♣ Volně dle Jana Rychtáře. Nechť p, q celá nesoudělná, p/q řešení. Pak máme $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Dle předpokladu je nejvýše jedno z čísel p, q sudé, tedy rovnice nemůže být splněna (prověř).

1.2 Bodem P ležícím na společné tětivě dvou kružnic jsou vedeny tětivy KM a LN první a druhé kružnice. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový.

♢ Z mocnosti bodu P k oběma kružnicím dostáváme $|KP||PM| = |LP||PN|$, tedy leží K, L, M, N na kružnici. Na úlohu ovšem dokonale vyzrál Ján P. (zdravíme Banskou Bystricu), který si situaci narýsoval, změřil protější úhly v čtyřúhelníku $KLMN$ a zjistil, že jejich součet je 174°, čímž úlohu vyvrátil (to že v průběhu konstrukce opsal kružnici třem bodům, aniž by některým z nich procházela, ho nevyvedlo z míry).

1.3 Je dán $\triangle ABC$. Na jeho srtranách AB a BC jsou vně zkonstruovány čtverce $ABMN$ a $BCPQ$. Dokažte, že středy čtverců a středy úseček MQ a AC tvoří čtverec.

♡ Nechť V je střed AM, T je střed CQ. Poněvadž $\triangle ASV$ je podobný $\triangle ACM$, je $SV \| CM$ a platí $2|SV| = |CM|$, podobně $TU \| CM$, $2|TU| = |CM|$, $ST \| AQ$, $2|ST| = |AQ|$, $VU \| AQ$, $2|VU| = |AQ|$. Tedy $STUV$ je rovnoběžník. Uvažme nyní otočení kolem bodu B o 90°. Pak $M \to A$, $C \to Q \Rightarrow |AQ| = |MC|$ a navíc $AQ \perp MC$, tedy $STUV$ je čtverec.

1.4 Nechť číslo $A = 100101102\dots998999$ vznikne tak, že napíšeme za sebe všechna trojciferná čísla podle velikosti. Dokažte, že A není mocnina.

♠ Volně dle Jana Rychtáře. $A = 100 \cdot 10^{899\cdot 3} + 101 \cdot 10^{898\cdot 3} + \dots + 998 \cdot 10^3 + 999 \equiv 100 + 101 + \dots + 999 = 450(100+999) \equiv 45000 \equiv 45 \pmod{999}$. Tedy $A \equiv 18 \pmod{27}$. Ale $A \equiv 3 \pmod 4$, tedy A a není mocninou (mimo první).

1.5 Dokažte, že existují čísla A, B pro která platí
$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n$ pro všechna $n \in N$, kde $a_i = \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg}(i-1)$.

♣ Vyjádříme:

$$\operatorname{tg}1 = \frac{\operatorname{tg}k - \operatorname{tg}(k-1)}{1+\operatorname{tg}k\cdot\operatorname{tg}(k-1)} \Rightarrow \operatorname{tg}k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = \frac{\operatorname{tg}k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg}1} - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{tg}i - \operatorname{tg}(i-1)}{\operatorname{tg}1} - 1\right) =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}n}{\operatorname{tg}1} - n \Rightarrow A = \frac{1}{\operatorname{tg}1},\ B = -1$$

1.6 Dokažte, že pro a, b, $c \in R^+$ platí:
$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

♢ Uvažme $a^2 \geq a^2 - (b-c)^2$, $b^2 \geq b^2 - (c-a)^2$, $c^2 \geq c^2 - (a-b)^2$. Vynásobením dostáváme
$a^2b^2c^2 \geq [a-(b-c)][a+(b-c)][b-(c-a)][b+(c-a)][c-(a-b)][c+(a-b)] = (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2$,
což vzhledem k a, b, $c \in R^+$ nám dává dokazovanou nerovnost.

1.7 Dokažte pro n kladných čísel $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ nerovnost
$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \dots + (-1)^{n+1}a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1}a_n)^2$.

♠ Nejprve dokážeme nerovnost pro lichá $n = 2k+1$, $k \in N$.

i) $n = 1$; platí $a_1^2 \geq a_1^2$

ii) $n > 1$;

$a_1^2 - a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1^2 - a_2^2 + (a_3 - a_4 + \cdots + a_n)^2 =$
$= a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 2(a_1 - a_2)(a_3 - a_4 + \cdots + a_n) + (a_3 - a_4 + \cdots + a_n)^2 + 2a_1a_2 - 2a_2^2 - 2(a_1 - a_2)(a_3 - a_4 + \cdots + a_n) \geq$
$\geq ((a_1 - a_2) + (a_3 - a_4 + \cdots + a_n))^2 + 2a_1a_2 - 2a_2^2 - 2(a_1 - a_2)a_3 =$
$= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_n)^2 + 2(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \geq (a_1 - a_2 + \cdots + a_n)^2$

Tedy nerovnost platí pro lichá n. Pro sudá n pak dostáváme:
$a_1^2 - a_2^2 + \cdots + a_{n-1} - a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1})^2 - a_n = (a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n)(a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \geq$
$\geq (a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n)^2$