Řešení 6. série III. ročníku BRKOS*u*

6.1 Řešte v $\mathbf{Z}$ rovnici $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Rovnici si upravme do tvaru $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$.

- a) $xy(xy + 1) \neq 0$: Poněvadž $(xy, xy + 1) = 1$, musí nutně platit $xy = \pm a^2, \quad xy + 1 = \pm b^2$, kde $a, b \in \mathbf{N}$. Pak ovšem $(b - a)(b + a) = b^2 - a^2 = \pm 1$ a taková $a, b \in \mathbf{N}$ neexistují.
- b) $xy(xy + 1) = 0 = (x + y)^2$
  - (i) $xy = 0, x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0$
  - (ii) $xy + 1 = 0, x + y = 0 \Longrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow y = \mp 1$

Rovnice má tři řešení: $(x, y) \in \{(0, 0); (-1, 1); (1, -1)\}$.

6.2 Nechť a, b jsou kladná racionální čísla a nechť číslo $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je také racionální. Potom i čísla $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$ jsou racionální. Dokažte.

Je zřejmé, že $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Označmě $s = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Pak $\sqrt{a} = s - \sqrt{b} \Longrightarrow a = (s - \sqrt{b})^2 \Longrightarrow \cdots$ Jednoduchými úpravami dospějeme ke vztahům $\sqrt{a} = \frac{s^2+a-b}{2s}; \sqrt{b} = \frac{s^2+b-a}{2s}$. A protože $a, b, s \in \mathbf{Q}$, je nutně $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$.

6.3 Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c ne větší než jedna platí:

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ac} + \frac{c}{1 + ab} \leq 2$$

Bez újmy na obecnosti: $0 < a \leq b \leq c \leq 1$. Poněvadž $(1-a)(1-b) \geq 0$, platí $a+b \leq 1+ab < 1+2ab$. Dále $a + b + c \leq 1 + a + b < 2 + 2ab$ a také $1 + ab \leq 1 + ac \leq 1 + bc$. Z posledních neraovnic a z nerovnice $a + b + c < 2 + 2ab$ plyne

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ac} + \frac{c}{1 + ab} \leq \frac{a + b + c}{1 + ab} < \frac{2 + 2ab}{1 + ab} = 2$$

Dokázali jsme tedy dokonce ostrou nerovnost.

6.4 Délky stran obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p, q. Obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $p \geq q$.

- a) $(p, q) = 1$: Úhlopříčka protne v každém z p sloupců buď jeden čtverec, nebo dva čtverce (právě když přechází z jedné řady na druhou, tedy právě v $q - 1$ případech). Celkem tedy protne $p + q - 1$ čtverců.
- b) $(p, q) = d$: Úhlopříčka je teď rozdělena na d stejných dílů a každý z nich, je úhlopříčkou nějakého obdélníka $\frac{p}{d} \times \frac{q}{d}$, který již splňuje podmínku v a).

Odtud plyne, že úhlopříčka protíná právě $p + q - d$ čtverců.

6.5 Čtverečky nekonečného čtvercového papíru jsou obarveny třemi barvami. Zjistěte, zda existuje sto řádků a sto sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají tutéž barvu.

Vezměme si vodorovný nekonečně dlouhý pás šířky 298 čtverečků. V něm existuje 100 stejně obarvených sloupců. Uvažme jeden z těchto sloupců. Podle Dirichletova pricipu je v něm aspoň 100 čtverečků stejné barvy. Stejně jako v ostatních 99 sloupcích.

6.6 Ve městě tvaru čtverce o straně 10 km je 1000 policistů. Zjistěte, zda existuje čtverec se stranami délky 4 km rovnoběžnými se stranami města, v němž je alespoň 112 policistů.

Rozdělme si město na 9 čtverců o straně délky $3\frac{1}{3}$km. Podle Dirichletova pricipu existuje mezi těmito 9 čtverci jeden, v němž je aspoň 112 policistů. Tento čtverec lze zřejmě pokrýt čtvercem o straně délky 4km.

6.7 Body M a P jsou středy stran BC, CD konvexního čtyřúhelníka $ABCD$. Je dána hodnota $a = |AM| + |AP|$. Dokažte, že obsah čtyřúhelníka $ABCD$ je menší než $a^2/2$.

Poněvadž M, P jsou středy stran, jsou následující vztahy zřejmé: $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$; $S_{ADP} = \frac{1}{2}S_{ADC}$; $S_{MCP} = \frac{1}{4}S_{BCD} < \frac{1}{4}S_{ABCD}$; $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABCD} \Longrightarrow S_{AMP} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{MCP} - S_{ADP} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{MCP} > \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Dále pak

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{|AM| + |AP|}{2}\right)^2 \geq |AM| \cdot |AP| \qquad \text{(A-G nerovnost)}$$

Tedy $\frac{a^2}{2} \geq 2|AM||AP| \geq 4 \cdot \frac{|AM| \cdot |AP|}{2} \cdot \sin(\angle|MAP|) = 4S_{AMP} > S_{ABCD}$.

▷ *Nedá se nic dělat, ale letošní ročník je pryč. Těm úspěšnějším z vás přijde v září pozvánka na soustředění* BRKOSu*, které se bude konat začátkem října. Přejeme všem dlouhé prázdniny a s většinou z vás se těšíme na shledanou ve 4. ročníku* BRKOSu*!*