Řešení 5. série III. ročníku BRKOS*u*

5.1 Řešte v $\mathbf{Z}$ rovnici $\quad x_1^4 + \cdots + x_9^4 = 1994$

Označme $m(x)$ zbytek čísla x po dělení 16. Pro $\forall x \in \mathbf{Z}$ platí $m(x^4) \in \{0,1\}$, z čehož plyne $m(x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_9^4) \in \{0,1,\ldots,9\}$. Rovnice nemá řešení, protože $m(1994) = 10$.

5.2 Nechť p je prvočíslo, $a \in N$, $(a,p) = 1$. Pak $f : \{1,2,\ldots,p-1\} \to \{1,2,\ldots,p-1\}$ dané předpisem $f(x) \equiv x^a \pmod p$ je permutace (bijekce). Dokažte.

Dané tvrzení neplatí. Stačí totiž například zvolit $a = 2, p = 3$.

5.3 Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p je číslo $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$ dělitelné p.

Řešení podle M. Niepela:

Dané číslo si upravme do tvaru:

$$\underbrace{11\ldots1}_{9p} + \underbrace{11\ldots1}_{8p} + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{p} - (\underbrace{11\ldots1}_{9} + \cdots + 11 + 1) = \underbrace{11\ldots1}_{9(p-1)}\underbrace{00\ldots0}_{9} + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{p-1}0 = \sum_{i=1}^{9} \frac{10^{i(p-1)} - 1}{9} \cdot 10^i$$

- $\diamond$ Pro $p \notin \{2,3\}$ platí $p | 10^{i(p-1)} - 1$ (podle Eulerovy věty) $\Longrightarrow p | \frac{10^{i(p-1)}-1}{9} \cdot 10^i$, tedy p dělí dané číslo.
- $\diamond$ Pro $p \in \{2,3\}$ tvrzení zřejmě platí.

5.4 Zjistěte, pro které cifry a existuje přirozené číslo n větší než 3 takové, že číslo $1 + 2 + \cdots + n$ je zapsáno pouze pomocí cifer a.

Je zřejmé, že $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$.

- (i) $a = 1 \Longrightarrow \frac{1}{9}(10^k - 1) = \frac{n}{2}(n+1) \Longrightarrow 2.10^k = (3n+1)(3n+2)$. Poněvadž $(3n+1, 3n+2) = 1$ a $2^{k+1} < 2^{2k} = 4^k < 5^k$, nemůže být $(3n+1)(3n+2) = 2^{k+1}5^k$. Tedy pro $a = 1$ n neexistuje.

Dále platí $8[\frac{n}{2}(n+1)] + 1 = (2n+1)^2$.

- (ii) $a = 2; 4; 7; 9 \Longrightarrow (2n+1)^2 \equiv 3; 7 \pmod{10} \Longrightarrow n$ neexistuje.
- (iii) $a = 3; 8 \Longrightarrow (2n+1)^2 \equiv 5; 65 \pmod{100} \Longrightarrow n$ neexistuje.
- (iv) $a = 5; 6 \Longrightarrow n = 10; 11; 36$.

5.5 Najděte největší hodnotu $k \in \mathbf{R}$ takovou, aby pro všechna a, b, $c \in \mathbf{R}$ platilo:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq k(ab+bc+ca)^2$$

Pro $a = b = c$ dostaneme $\frac{2}{3} \geq k$. Nyní stačí dokázat nerovnost $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq \frac{2}{3}(ab + bc + ac)^2$, což není obtížné, neboť je ekvivalentní s nerovností: $\frac{1}{6}[(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2] + \frac{5}{12}[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2] \geq 0$.

5.6 Do oblouku AB je vepsána lomená čára AMB ($|AM| > |MB|$). Dokažte, že pata výšky KH zpuštěná ze středu oblouku K na úsečku AM, dělí lomenou čáru na polovinu, tzn. $|AH| = |HM| + |MB|$.

Na polopřímce AM za bodem M sestrojme bod B' tak, že $|BM| = |B'M|$. Označme $|\angle MAB| = \alpha$, $|\angle MBA| = \beta$. Platí: $|\angle BMB'| = \alpha + \beta$; $|\angle AMK| = |\angle ABK| = \frac{\alpha+\beta}{2}$, z čehož plyne, že KM je osa $\angle BMB'$, tedy i osa úsečky $BB' \Longrightarrow |KB'| = |KB| = |KA|$. Bod H je patou výšky v rovnoramenném $\triangle AKB'$, tedy $|AH| = |HB'| = |HM| + |HB'| = |HM| + |MB|$.

5.7 Dokažte, že plocha kolmé projekce krychle s hranou délky 1 na libovolnou rovinu je rovna délce její kolmé projekce na přímku kolmou k této rovině.

Označme rovinu α takovou, která je rovnoběžná s projekční a s krychlí má společný jeden bod. Označme jej P. (Pokud taková rovina neexistuje, je jedna hrana nebo jedna stěna rovnoběžná s projekční rovinou a tvrzení je zřejmé.)

Délka projekce na přímku je rovna délce projekce úhlopříčky vedené z vrcholu P a ta je rovna součtu projekcí tří hran z vrcholu P vycházejících.

Z druhé strany: Plocha projekce je rovna součtu projekcí tří navzájem kolmých stěn, v nichž je bod P. Tvrzení bude dokázáno, pokud plocha projekce stěny bude rovna délce projekce k ní kolmé hrany.

Plocha projekce stěny je $\cos\varphi$, kde φ je odchylka stěny a roviny α (Kolmá rovina ke stěně a α protíná stěnu a projekci v úsečkách, jejichž poměr je $\cos\varphi$). Délka projekce hrany je $\sin\psi$, kde ψ je odchylka hrany a α. Vezmeme-li stěnu a k ní kolmou hranu, je nutně $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, tedy $\cos\varphi = \sin\psi \Longrightarrow$ plocha projekce stěny je rovna délce projekce k ní kolmé hrany.