Řešení 4. série III. ročníku BRKOS*u*

4.1 Dva hráči hrají následující hru: První postaví na šachovnici krále a udělá s ním jeden tah (podle pravidel šachové hry). Potom hráči střídavě pohybují králem, přičemž je zakázáno postavit krále na ta políčka šachovnice, kde již stál. Prohrává ten, kdo nemůže provést další tah. Zjistěte, který hráč má vítěznou strategii.

První hráč si šachovnici rozdělí na „parkety“ 1×2. V prvním tahu obsadí jednu „parketu“ a v dalších tazích bude obsazovat pole na „načaté“ parketě. První hráč tak bude mít vždy možnost tahu a tedy vyhraje.

4.2 Nechť $\Pi(x)$ značí počet prvočísel větších než 1 a nepřevyšujících x. Dokažte, že $\Pi(x) \geq \ln(\ln x)$.

Řešení podle P. Kaňovského:

Označme $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost všech prvočísel. Předpokládejme, že $\exists x \in \mathbf{N}, x \geq 2$ takové, že $\Pi(x) < \ln(\ln x)$. Označíme-li $\Pi(x) = k$, pak $x > \mathrm{e}^{\mathrm{e}^k}$. Poněvadž $\Pi(x) = k$, musí být $p_{k+1} > x$, z čehož plyne $p_{k+1} > \mathrm{e}^{\mathrm{e}^k}$, což je spor, neboť matematickou indukcí ukážeme, že pro $\forall m \in \mathbf{N}_0$ platí $p_{m+1} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^m}$.

- (i) pro m=0 je $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^m} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e} > 2 = p_1$; pro $m = 1$ je $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^m} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^1} > 3 = p_2$.
- (ii) Nechť $\forall i \in \{0, 1, \dots, m\} : p_{i+1} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^i}$. Pak $p_1 p_2 \cdots p_{m+1} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{e}^m}$. Číslo $p_1 p_2 \cdots p_{m+1} - 1$ zřejmě není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}$, tedy $p_{m+2} \leq p_1 p_2 \cdots p_{m+1} - 1 < p_1 p_2 \cdots p_{m+1} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{e}^m} \Longrightarrow \ln p_{m+2} < \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 + \cdots \mathrm{e}^m = \frac{\mathrm{e}^{m+1}-1}{\mathrm{e}-1} < \mathrm{e}^{m+1} \Longrightarrow p_{m+2} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{m+1}}$.

4.3 Zjistěte, zda existují $m, n \in \mathbf{N}, n < m$ taková, že $2^n + 2$ a $2^m + 1$ jsou dva po sobě jsoucí členy Fibonacciho posloupnosti.

Řešení podle M. Niepela:

Pro $1 \leq n < m$ platí $2^n + 2 < 2^m + 1$. Pro $n = 1$ není $2^1 + 2 = 4$ člen Fibonacciho posloupnosti. Nechť tedy $n \geq 2$. Pak $2^n + 2 \equiv 2 \pmod 4$ a $2^m + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Uvažme nyní posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbytků po dělení čtyřmi. $c_i \equiv f_i \pmod 4, c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ pro $\forall i \in \mathbf{N}$. Posloupnost c_n bude periodická: $1, 1, 2, 3, 1, 0,\ 1, 1, 2, 3, 1, 0, \dots$ Pro $n \geq 2$ se zde nevysytují členy $2, 1$ za sebou. Odtud plyne, že neexistuje $m, n \in \mathbf{N}$ splňující podmínku zadání.

4.4 Označme $p(n)$ počet způsobů, kolika lze rozměnit n dolarů, máte-li k dispozici pouze jedno-, pěti- a desetidolarové bankovky.

- a) Určete $p(1993)$.
- b) Řešte rovnici $n = p(n)$.

Rozložme $n = a + 5b + 10c = a + 5(b + 2c)$ kde a, b, c jsou počty jednotlivých bankovek, $b + 2c$ nabývá hodnot $0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ a pro dané $b + 2c$ nabývá c hodnot $0, 1, \dots, \lfloor \frac{b+2c}{2} \rfloor$. Sečtením dostaneme

$$p(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \right)$$

Pro $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ sudé dostaneme $p_s(n) = (\lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1)^2$. Pro $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ liché je $p_l(n) = (\lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 2)$.

- 1. Jelikož $\lfloor \frac{1993}{5} \rfloor = 398$ je sudé, $p(1993) = 200^2 = 40000$.
- 2. Nechť $n = 10k + l,\ k, l \in \mathbf{N}_0,\ l < 10$. Potom $\lfloor \frac{n}{10} \rfloor = k$.
  - a) $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ je sudé $\iff l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $p_s(n) = (k+1)^2 = 10k + l = n \Longrightarrow (k-4)^2 = 15 + l$, což zřejmě řeší pouze $l = 1, k \in \{0, 8\}$, tedy $n_1 = 1, n_2 = 81$
  - b) $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ je liché $\iff l \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. $p_l(n) = (k+1)(k+2) = 10k+l = n \Longrightarrow k^2-7k+2-l = 0$. Má-li tato rovnice mít řešení, pak $\sqrt{D} \in \mathbf{N} \Longrightarrow D = 49 - 4(2-l) = 41 + 4l$ je čtverec, což pro $l \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ není.

  Řešení: 1, 81.

4.5 Pro $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Řešení podle M. Piňose:

Pro $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^+$ platí $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (plyne z Cauchyovy nerovnosti). Této nerovnosti užijeme v našem příkladě $a^8 + b^8 + c^8 = (a^4)^2 + (b^4)^2 + (c^4)^2 \geq a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4$ a tedy

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^4 + b^4 + c^4a^4}{a^2b^2c^2} = \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq \frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b} + \frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c} = b^2+c^2+a^2 \geq ab+bc+ca$$

Tím jsme tedy dokázali

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^2b^2c^2} \geq ab + bc + ca,$$

což je ekvivalentní dané nerovnosti.

4.6 Je-li $n > 1$ přirozené číslo, existuje pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ takové, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ číslo a_{k+1} dělí součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Dokažte!

Uvažme dva případy:

- (i) n je sudé ($n = 2k$). Pak pořadí $(k+1, 1, k+2, 2, \ldots, 2k-1, k-1, 2k, k)$ má danou vlastnost.
- (ii) n je liché ($n = 2k+1$). Pak přidáme-li k pořadí pro $n = 2k$ číslo $2k+1$ nakonec, dostaneme pořadí s požadovanou vlastností.

4.7 Matematik $\mathcal{A}$ zná součin jistých dvou přirozených čísel větších než 1, matematik $\mathcal{B}$ jejich součet. Určete z rozhovoru, jaká jsou to čísla:

$\mathcal{A}$:„Neznám tato čísla."
$\mathcal{B}$:„To jsem věděl."
$\mathcal{A}$:„Už vím, která to jsou."
$\mathcal{B}$:„Já taky."

Kdyby byla obě čísla prvočísla, $\mathcal{A}$ by je snadno uhodl. Kdyby byla obě sudá nebo obě lichá, byl by jejich součet sudý. Přijmeme-li Goldbachovu hypotézu, že každé sudé číslo lze rozložit na součet dvou prvočísel, nemohl by potom $\mathcal{B}$ tvrdit, že to věděl. Součet je tedy lichý a je dokonce tvaru $x+2$, kde x je liché složené číslo. Číslo $x = 9$ by narazilo na potíže v další části rozhovoru. Zkusme tedy $x = 15$. Zjistíme, že dvojice $(4, 13)$ splňuje podmínky úlohy.