Řešení 3. série III. ročníku BRKOS*u*

3.1 Mějme několik nenulových čísel. S čísly provádíme následující operaci: vybereme dvě čísla a, b a nahradíme je čísly $a + b/2$, $b - a/2$. Dokažte, že již nikdy nedostaneme původní soubor.

Uvažte součet čtverců původních a nových čísel.

3.2 Dokažte, že rovnice

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

má nekonečně mnoho řešení (x, y, z) v Z^3, kde x, y, z, po dvou nesoudělná. Kolik je takových řešení, kde $z = 1993$?

Rovnice je zřejmě ekvivalentní rovnici $xy + yz + zx = 0$, tedy $x(y + z) = -yz$ a tedy $x|yz$, obdobně $y|zx$, $z|xy$ čili čísla x, y, z nemohou být po dvou nesoudělná nebo jsou všechna rovna 1 a nesplňují naši rovnici. Rovnice nemá žádné řešení pro $(x, y, z) \in Z^3$, tedy nemá ani řešení pro $z = 1993$.

3.3 **a)** Dokažte, že pro libovolné $a \in N$ $(a \neq 1)$ má rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

alespoň tři řešení v N^2.

b) Určete kolik řešení má daná rovnice pro $a = 1993$.

a) Daná rovnice má tolik řešení, kolik existuje kladných dělitelů a^2. Je totiž $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = (x - a)(y - a)$.
Tedy $(x - a)|a^2$ a každý dělitel a^2 určuje právě jedno řešení. Čísla 1, a, a^2 jsou různí dělitelé a.

b) Protože 1993 je prvočíslo, tak 1, 1993, 1993^2 jsou jedinými děliteli 1993^2 a rovnice má právě tři řešení.

3.4 Dokažte že a, b, $c \in R^+$ nerovnost

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Všimněme si, že

$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3-a^3}{c^2+ac+a^2} = a - b + b - c + c - a = 0$

Budeme tedy dokazovat ekvivalentní nerovnost:

$\frac{1}{2}(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ac+a^2}) \geq \frac{a+b+c}{3}$

$\forall x, y \in R^+ : 2(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 3xy \geq x^2 + y^2 + xy \Rightarrow \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{x+y}{3}$

Postupnou volbou a, b, c za x, y dostaneme sečtením požadované.

3.5 V $\triangle ABC$ leží bod M na straně AB a bod N na straně BC. Bod O je průsečíkem úseček CM a AN. Platí, že $|AM| + |AN| = |CM| + |CN|$. Dokažte, že $|AO| + |AB| = |CO| + |CB|$.

Tuto úlohu se nikdo neřešil!

Nejprve jedno tvrzení bez důkazu: mějme $\triangle XYZ$ a uvažme kružnici připsanou ke straně YZ (dotýká se strany YZ a v bodech T, T' přímek XY, XZ, leží vně trojúhelníka). Pak $2|XT| = 2|XT'| = o_{XYZ}$. Takže
$|AM| + |AN| = |CM| + |CN| \Rightarrow |BM| + |BN| + |AM| + |AN| = |BM| + |BN| + |CM| + |CN| \Rightarrow o_{ABN} = o_{CMB}$
Uvážíme-li kružnici k_1 připsanou $\triangle ABN$ ke straně AN a kružnici k_2 připsanou $\triangle CMB$ ke straně CM, pak zřejmě $2|BT_1| = o_{ABN} = o_{CMB} = 2|BT_2|$, tedy $k_1 = k_2$ a máme kružnici k (T bod dotyku s AB), která se dotýká přímek AB, AN, CM, CB, přitom je také připsaná $\triangle AMO$, tedy $2|MT| = o_{AMO} = |OM| + |MA| + |AO|$, ale také $2|MT| = 2|BT| - 2|MB| = |CB| + |CM| - |BM|$ a dostáváme hledané $0 = 2|MT| - 2|MT| = |CB| + (|CM| - |OM|) - (|BM| + |MA|) - |AO| = |CB| + |CO| - |AB| - |AO|$.

3.6 Mějme rovnoramenný pravoúhlý $\triangle ABC$ s pravým úhlem u vrcholu C. Na stranách AC a BC jsou dány body D, E tak, že $|CD| = |CE|$. Prodloužení kolmic spuštěných z D a C na přímku AE protínají AB v bodech K a L. Dokažte, že $|KL| = |LB|$.

Na prodloužení AC za bodem C sestrojme bod M tak, že $|CM| = |DC|$. Potom $\triangle ACE$ po otoření o $90°$ kolem C dává $\triangle BMC$, tedy $DK||CL||MB$ a z podobnosti plyne $|KL| = |LB|$.

3.7 Z klobouku, ve kterém je r koulí očíslovaných od 1 do r, n-krát vytáhneme z klobouku jednu kouli a dáme ji zpět. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel na vytažených koulích je s?

Nejprve zjistěme, kolika způsoby můžeme vytáhnout součet s. Těch je zjevně tolik, kolik je způsobů rozmístění $P(s, n, r)$ s koulí do n přihrádek tak, aby v každé přihrádce byla alespoň jedna koule a v žádné nebylo více jak r koulí. Neomezujeme-li počet koulí v přihrádkách shora, máme $\binom{s-1}{n-1}$ způsobů (uvážíme $s - n$ koulí a $n - 1$ zarážek). Označíme-li ještě A_i množinu těch rozdělení, ve kterých je v i-té přihrádce více než r koulí, máme

$$P(s, n, r) = \binom{s-1}{n-1} - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Z principu inkluze a exkluze dostáváme:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}|, \text{ dále} \qquad |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}| = \binom{n - ri - 1}{n-1},$$

kde jsme poslední vztah získali „odebráním“ dalších ri koulí z „přeplněných“ přihrádek, navíc $\binom{x}{y} = 0$ pro $x < y$. Tedy celkem

$$P(s, n, r) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n - ri - 1}{n-1}.$$