Řešení 1. série III. ročníku BRKOS*u*

1.1 Čokoládová tabulka je složena z $m \cdot n$ obdélníčků. Kolikrát nejméně ji musíme rozlomit, abychom získali jednotlivé obdélníčky? (rozlamujeme vždy jen jednu vrstvu čokolády)

Mnozí řešitelé sice určili správně počet rozlomení, leč neukázali, že je minimální.
Stačí si všimnout, že každým rozlomením nám přibude jeden díl, je tedy třeba $mn - 1$ rozlomení (ať lámeme jakýmkoli způsobem).

1.2 Ve vrholech pravidelného šestiúhelníka jsou umístěny středy kružnic o poloměru $a/\sqrt{2}$. Určete obsah části šestiúhelníka ležící vně kružnic.

Na začátku řešení bylo nutné vymezit vzájemnou polohu kružnic a šestiúhelníka, tedy zjistit, co se vlastně počítá (mimo jiné ověřit, že se protínají právě kružnice se středy v sousedních vrcholech)($\sqrt{3}/2 > a/\sqrt{2} > a/2$). Nyní si všimněme, že vrcholy každé strany šestiúhelníka a průsečík kružnic se středy v těchto vrcholech tvoří rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ($(a/\sqrt{2})^2 + (a/\sqrt{2})^2 = a^2$). Lze tedy útvar, který v šestiúhelníku vymezují kružnice, rozložit na šest shodných rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků a šest shodných kruhových výsečí (o velikosti $\pi/6$), nyní již vidíme, že pro hledaný obsah S tedy platí
$S = 3a^2\sqrt{3}/2 - 6(a^2/4) - 6(\pi a^2/24) = a^2/4(6\sqrt{3} - \pi - 6)$.

1.3 Je dána kružnice a bod A mimo ni. Nechť AB a AC jsou tečnami této kružnice (B a C jsou body dotyku). Dokažte, že střed kružnice vepsané trujúhelníku ABC leží na dané kružnici. Uvádíme řešení tandemu Janeček - Vaněk.
Označme O střed kružnice vepsané $\triangle ABC$, S střed dané kružnice, X patu kolmice spuštěné z O na AB, $Y := SA \cap CB$. Pak $|\angle AOX| = |\angle ASB| = 90 - \alpha/2$. Dále $\triangle BOX \simeq \triangle BOY$ podle věty Ssu, tedy
$|\angle BOX| = |\angle BOY| \Rightarrow |\angle BOY| = (180 - |\angle AOX|)/2 = 45 + \alpha/4$. Nyní $|\angle SBO| = 180 - |\angle ASB| - |\angle BOY| =$
$= 45 + \alpha/4$. Tedy $\triangle BSO$ je rovnoramenný se základnou $BO \Rightarrow |SB| = |SO| \Rightarrow O \in k(S; |SB|)$.

1.4 Mějme rovnice
(1) $\quad x^2 + y^2 = n$
(2) $\quad x^2 + y^2 = 2n$,
kde $n \in \mathbf{N}$. Dokažte, že mají stejně řešení v $\mathbf{Z}$.

Označme M_n množinu celočíselných řešení rovnice (1), M_{2n} množinu celočíselných řešení rovnice (2). Pak zobrazení

$$\begin{array}{llll} f: & M_n & \rightarrow & M_{2n} \\ & (x_0, y_0) & \mapsto & (x_0 - y_0, x_0 + y_0) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} g: & M_{2n} & \rightarrow & M_n \\ & (x_0, y_0) & \mapsto & (\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{x_0-y_0}{2}) \end{array}$$

jsou prostá zobrazení, a že „vedou“ tam kam mají se snadno ověří: dosazením do rovnic (2), resp. (1), zjistíme, že $f(x, y)$, resp. $g(x, y)$ jsou řešeními, dále zřejmě $f(x, y) \in Z \times Z$, ale $g(x, y) \in Z \times Z$ také, neboť
$(x, y) \in M_{2n} \Rightarrow x \equiv y \pmod 2$. A tedy $|M_N| = |M_{2n}|$. Mimochodem je $g = f^{-1}$, ale to není pro naši úvahu nutné.

1.5 Existuje nekonečná množina přirozených čísel taková, že součet libovolných dvou jejích různých prvků je dělitelný jejich rozdílem?

Neexistuje. Nechť množina M má požadované vlastnosti a $a \in M$. Vyberme nyní libovolně $x \in M$, $x \neq a$. Víme, že $x - a | x + a$ a $x - a < x + a$, tedy musí být $x + a > 2(x - a)$, tedy $3a > x$, takže M je omezená.

1.6 Číslo m je nejmenší počet kruhů o poloměru 1, kterými je možné pokrýt zadaný konvexní mnohoúhelník $\mathcal{M}$, číslo n je největší počet kruhů o průměru 1, které se nepřekrývají a jejichž středy náleží mnohoúhelníku $\mathcal{M}$. Určete, které z obou čísel m a n je větší.

Totální výbuch na jednoduché a krásné úloze.

Mějme n nepřekrývajících se kruhů o průměru 1, jejichž středy náleží danému mnohoúhelníku $\mathcal{M}$. Každý z nich zvětšeme na kruh o poloměru 1 při zachování středů. Tyto kruhy ovšem pokrývají $\mathcal{M}$, neboť kdyby ne, tak by existoval bod mnohoúhelníka $\mathcal{M}$ vzdálený o více než o 1 od libovolného středu, tedy by šlo původní systém doplnit o kruh o průměru 1 se středem v tomto bodě opět na systém nepřekrývajících se kruhů o průměru 1, jejichž středy náleží mnohoúhelníku $\mathcal{M}$, což je ve sporu s výběrem čísla n. Tedy $n \geq m$.

1.7 Rozhodněte, který ze dvou mnohočlenů

$$F(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}, \qquad G(x) = (1 - x^2 - x^3)^{1000}$$

má větší koeficient u mocniny x^{20}.

Představme si polynom $F(x)$, resp. $G(x)$, jako součin tisíce mnohočlenů $1 + x^2 - x^3$, resp. $1 - x^2 - x^3$ a rozmysleme, jakým způsobem „vzniká“ koeficient u x^{20}. Snadno nahlédneme, že
$(F(x))_{20} = (-1^3)^0(1^2)^{10}a + (-1^3)^2(1^2)^7b + (-1^3)^4(1^2)^4c + (-1^3)^6(1^2)^1d = a + b + c + d$,
$(G(x))_{20} = (-1^3)^0(-1^2)^{10}a + (-1^3)^2(-1^2)^7b + (-1^3)^4(-1^2)^4c + (-1^3)^6(-1^2)^1d = a - b + c - d$,
kde a, b, c, d jsou kladné součiny příslušných kombinačních čísel.

!! Nyní ještě několik závažných poznámek. Někteří řešitelé se sdružovali do týmů a byli také odpovídajícím způsobem ohodnoceni (zatím pouze na vybraných příkladech). V dalších sériích již budeme důsledně hodnotit všechny příklady po týmech (každý tým je hodnocen jako jednotlivec, získané body se rovným dílem rozdělí mezi jeho členy). Dále se vyskytly problémy při překladu textu úloh do slovenštiny (chyby vyplývající z mylného překladu nebyly brány v potaz). Protože se slovo „vně“ vyskytuje i v zadání druhé série, připomínáme, že slovensky znamená „vonku“.

Závěrem ještě prosba několik. Pište prosím tak, abyste zachytili **právě** to podstatné. Když řešení napíšete, tak si jej po sobě přečtěte a třeba je pak rádi sami přepíšete. Pište prosím čitelně.

Těšíme se
na vaše
betálná řešení