Řešení 5. série II. ročníku BRKOSu

5.1 Dokažte, že pro libovolné přirozené n existuje číslo, sestavené pouze z cifer 1 a 2, dělitelné 2^n.

Příklad lze snadno vyřešit matemetickou indukcí:

1) pro n=1 je hledaným číslem dvojka.

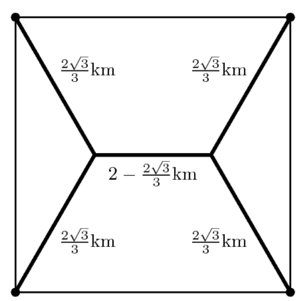
2) Mějme číslo X sestavené pouze z jedniček a dvojek dělitelné 2^n. Předepsáním číslice 1 nebo 2 (podle zbytku X po dělení 2^{n+1}) před číslo X dostaneme číslo složené ze samých jedniček a dvojek dělitelné 2^{n+1}.

5.2 Dokažte, že jestli p, q, r jsou racionální čísla a platí: $(p+q+r)^2 = p^2+q^2+r^2$, potom $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ je druhou mocninou racionálního čísla.

Všichni řešitelé snadno prokoukli chybu v zadání a tvrzení vyvrátili (stačilo volit $p = q = 1$, což dá: $s = \sqrt{(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)} = \sqrt{2}$, což neni racionální číslo). Někteří dokonce opravili podmínku v zadání na $p^2 + q^2 + r^2 + 2 = (p + q + r)^2$, což po úpravě na $1 = pq + qr + rp$ povede k $s = \sqrt{(q+p)^2(p+r)^2(r+q)^2} \in \mathbf{Q}$.

5.3 Čtyři vesnice leží ve vrcholech čtverce o straně 2 km. Vesnice jsou spojeny cestami tak, že z každé se lze dostat po cestě do libovolné jiné. Může být délka celková délka cest menší než $5,5$ km?

Může. Viz obrázek:



5.4 Dokažte, že pro libovolná kladná a, b, c platí:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

Sestrojme čtyřúhelník $OABC$ tak, aby $|\angle AOB| = 60^\circ = |\angle BOC|$, $|AO| = b$, $|BO| = b$, $|CO| = c$. Potom výpočtem: $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$, $|BC| = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$, $|AC| = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$, což dosazením do trojúhelníkové nerovnosti $|AB| + |BC| \geq |AC|$ dá požadovanou nerovnost. Rovnost nastane, když $S_{AOB} + S_{BOC} = S_{AOC}$, to je pro $1/c = (1/a)(1/b)$.

5.5 Posloupnost $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána takto: $r_1 = 2$, $r_{n+1} = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n + 1$. Dokažte ,že

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} < 1$$

Zkušeným řešitelům nečinila tato úloha potíže a schutí ji převálcovali matematickou indukcí. Stačilo jenom vycítit, že $(\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n}) = 1 - \frac{1}{R_{n+1}-1}$, a pak už není co řešit.

5.6 Kolik existuje různých celých čísel, které lze zapsat ve tvaru $a - a^*$, kde a je n-ciferné číslo ($10^{n-1} \leq a < 10^n$), a^* vzniklo zápisem cifer čísla a v obráceném pořadí?

Při řešení si budeme počínat stejně mazaně, jako to ve svých řešeních předvedli Marta Bednářová (Brno) a Pavel Gašpar (B. Bystrica), kteří jako jediní obdrželi plný bodový zisk.
Buď $a = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_0$, $a^* = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \cdots a_{n-1}$, kde $n \geq 2$. Pak $a - a^* = 10^{n-1} \cdot \underbrace{(a_{n-1} - a_0)}_{d_1} + 10^{n-2} \cdot \underbrace{(a_{n-2} - a_1)}_{d_2} + \cdots + 10 \cdot \underbrace{(a_1 - a_{n-2})}_{-d_2} + \underbrace{(a_0 - a_{n-1})}_{-d_1}$ Úpravou:

$$a - a^* = d_1(10^{n-1} - 1) + d_2(10^{n-2} - 10) + \cdots + d_k(10^{n-k} - 10^{k-1}), \tag{1}$$

kde $k = n/2$ pro sudé n, $k = (n-1)/2$ pro liché n, $d_i = a_{n-i} - a_{i-1}$. Neboť $1 \leq a_{n-1} \leq 9$, $0 \leq a_0, a_1, \ldots, a_{n-2} \leq 9$, pak

$$-8 \leq d_1 \leq 9,\ -9 \leq d_2,\ d_3, \ldots, d_k \leq 9 \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne, že nejvyšší možný počet hledaných čísel je $18 \cdot 19^{k-1}$. Je však třeba dokázat, že $d_1, d_2, \ldots, d_k$ určí $(a - a^*)$ jednoznačně.
Nechť $d_1, d_2, \ldots, d_k$ a $d'_1, d'_2, \ldots, d'_k$ splňují (1). Položme $r_i = d_i - d'_i$, pak

$$0 = r_1(10^{n-1} - 1) + r_2(10^{n-2} - 10) + \cdots + r_k(10^{n-k} - 10^{k-1}) \tag{3}$$

Zřejmě $|r_1|, |r_2|, \ldots, |r_k| \leq 18$. Jestliže $r_1 \neq 0$, nutně $r_1 = \pm 10$. Potom $10^{n-1} - 1 = |r_2(10^{n-3} - 1) + \cdots + r_k(10^{n-k-1} - 10^{k-2}| < 18 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-4} + \cdots + 1) < 2 \cdot 10^{n-2}$, což však pro $n \geq 2$ není splněno, proto $r_1 = 0$. Nyní analogicky pro $r_2, r_3, \ldots, r_k$. Tedy nakonec $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$, tzn. $d_i = d'_i$ pro všechna i. Poznamenejme ještě, že pro $n = 1$ je hledané číslo jediné.

5.7 Mějme N lidí, kteří se navzájem neznají. Dokažte, že je lze seznámit tak, aby žádní tři neměli stejný počet známých.

Zhruba podle M.Nečesala Pokud je n liché, tak nejprve jednoho člobrdu odděláme a nebudeme ho s nikým seznamovat. Nyní nám v každém případě zbude sudý počet lidí. Ty rozdělíme do dvou skupin A a B o k lidech (držím označení z **5.6**). Lidi ve skupinách jednoznačně očíslujme čísly od 1 do k. Nyní seznámíme každé dva lidi z různých skupin, jejichž součet čísel je maximálně $k+1$. Pak má i-tý člověk v libovolné skupině právě $k - i + 1$ známých. Skupiny jsou dvě, tedy stejný počet známých mají nanejvýš dva lidé.