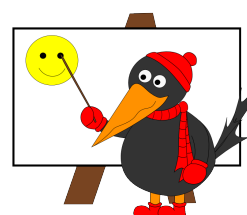


Pomocný text

ÚVODNÍ GULÁŠ

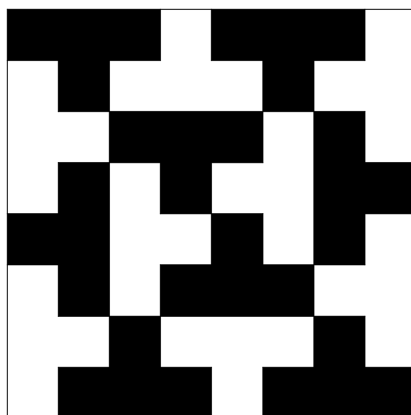


Následující povídání je především určeno naším začínajícím řešitelům. Budeme se zde snažit nastítnit příklady, který vám mohou pomoci při řešení první série.

Příklad 1. Je možné pokrýt šachovnici patnácti tetrominy T a tetrominem S? Je možné pokrýt šachovnici pouze tetrominy T?

Řešení. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že existuje pokrytí šachovnice zadanými tetrominy. Užijeme obarvení šachovnice, každé tetromino T obsahuje lichý počet bílých buněk (1 anebo 3) a v závislosti na předchozím počtu bílých buněk lichý počet černých buněk (3 anebo 1). Celkem máme patnáct T tetromin, tedy máme lichý počet bílých buněk a lichý počet černých buněk. Konečně, S tetromino je obarvené 2 bílými a 2 černými buňkami. Tedy máme celkem lichý počet černých a lichý počet bílých buněk, což je spor s faktem, že šachovnice má sudý počet černých a bílých políček. Tedy neexistuje pokrytí šachovnice patnácti tetrominy T a tetrominem S.

Ve druhé otázce s předchozím argumentem neuspějeme, neboť celkem potřebujeme šestnáct T tetromin a tedy budeme celkem mít sudý počet černých a bílých buněk. Proto se pokusíme najít vytoužené pokrytí šachovnice „zkoušením“. Po chvíli nám například podaří najít následující pokrytí:



Poznámka. Tetromina definujeme podle zavedených pojmů v pomocném textu <http://brkos.math.muni.cz/files/povidani/povidani154.pdf>, který můžete využít k získání dalších poznatků o tetrominech.

Příklad 2. Ukažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí $7^{2n} - 2352n - 1$ je dělitelné 2304.

Řešení. Dost často se užívá matematické indukce na řešení problému tohoto typu. Před samotným řešením označíme $P(n) = 7^{2n} - 2352n - 1$, n přirozené číslo. Poznamenejme, že rozložením na součin prvočísel platí $2304 = 2^8 3^2 = (2^4 3)^2 = 48^2$, což se nám může v dalších výpočtech hodit.

Pro $n = 1$ platí $7^2 - 2352 - 1 = -2304$, tedy tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$. Budeme se snažit dokázat tvrzení pro $n = k + 1$, tj. budeme se snažit upravovat výraz tak, abychom získali $P(k + 1) = P(k) + a(k)$, kde $a(k)$ je výraz dělitelný 2304 a o $P(k)$ víme, že je dělitelný 2304 z předpokladu.

$$\begin{aligned} 7^{2(k+1)} - 2352(k+1) - 1 &= (7^{2k} - 2352k - 1) - 7^{2k} + 7^{2(k+1)} - 2352 \\ &= P(k) + 7^{2k}(7^2 - 1) - (2304 + 48) \\ &= P(k) + 7^{2k}(7^2 - 1) - (7^2 - 1) - 2304 \\ &= P(k) + (7^2 - 1)(7^{2k} - 1) - 2304 \end{aligned}$$

Potřebujeme ukázat, že $(7^2 - 1)(7^{2k} - 1)$ je dělitelné 2304 = 48², na což využijeme formulku¹

$$a^i - 1 = (a - 1)(a^{i-1} + a^{i-2} + \dots + 1),$$

kde i je přirozené číslo a a reálné číslo. Tedy $((7^2)^k - 1) = (7^2 - 1)(7^{2(k-1)} + 7^{2(k-2)} + \dots + 1)$. Shrnuto $P(k+1) = P(k) + (7^2 - 1)^2(7^{2(k-1)} + 7^{2(k-2)} + \dots + 1) - 2304$. Užitím předpokladu $2304 \mid P(k)$ jsme ukázali, že $2304 \mid 7^{2(k+1)} - 2352(k+1) - 1$.

¹ kterou si můžete za domácí úlohu dokázat matematickou indukcí

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.
www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



TECHNICKÉ A PŘÍRODOVĚDNÉ VZDĚLÁVÁNÍ

ZÁŽITEK
S BONUSEM → KARIÉRY → PRESTIŽE → ZAJIŠTĚNÍ
www.generaceY.cz