Stručný úvod do teorie her

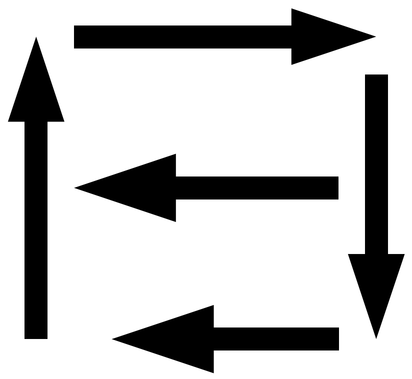
Michal Bulant

Čím se budeme zabývat

- Alespoň 2 hráči (osoby, firmy, státy, biologické druhy apod.)
- Každý hráč má určitou množinu *strategií*, konkrétní *situace* (outcome) ve hře určuje *zisk* (profit, payoff) každému hráči
- Základní typy her:
  - Dva hráči s nulovým součtem (konflikt)
  - Dva hráči s nenulovým součtem (konflikt, kooperace)
  - N hráčů – jaké koalice utvořit, jak si rozdělit zisk?

Ukázka hry a způsobu přemýšlení

		Slávek	
		A	B
Radek	A	2	-3
	B	0	2
	C	-5	10



Ukázka hry a způsobu přemýšlení

		Slávek	
		A	B
	A	1,1	-2,2
Radek	B	2,-2	-5,-5

Hry 2 hráčů – maticové hry

- Hry v *normální formě* – vyzkoušejte si

Slávek

		A	B	C	D
Radek	A	12	-1	1	0
	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

Dominance

- *Dominovaná strategie* – není proč ji hrát, proto je rušíme (I tranzitivně)

		Slávek				
		A	B	C	D	E
Radek	A	1	1	1	2	2
	B	2	1	1	1	2
	C	2	2	1	1	1
	D	2	2	2	1	0

Sedlový bod

- *Sedlový bod* (equilibrium, rovnovážná situace)
- Může být více sedlových bodů, nemusí ale existovat žádný, a to ani po redukci dominovaných strategií

Řešení v čistých strategiích

		Slávek			
		A	B	C	D
Radek	A	4	2	5	2
	B	2	1	-1	-20
	C	3	2	4	2
	D	-16	0	6	1

Řešení v čistých strategiích

- **Věta:** *Každé 2 sedlové body mají stejnou hodnotu, situace ,složená ze strategií obsahujících sedlový bod, je sedlovým bodem.*

- *Jak najít sedlové body efektivně?*

Řešení v čistých strategiích

		Slávek					
		A	B	C	D		
Radek	A	4	3	2	5	2	**maximin**
	B	-10	2	0	-1	-10	
	C	7	5	2	3	2	**maximin**
	D	0	8	-4	-5	-5	
		7	8	2	5		

minimax

Hra bez sedlového bodu

		Slávek A	Slávek B		
Radek	A	2	-3	-3	
	B	0	2	0	**maximin**
	C	-5	10	-5	
		2	10		
		minimax			

Smíšené strategie

- *Pravděpodobnostní rozšíření* maticových her
- Umožňují se strategie jako 1/3 A + 2/3 B
- *Očekávaná hodnota* výnosů $a_1, a_2, \ldots, a_k$, hrajeme-li je s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, je

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_k a_k,$$

Jak hrát se smíšenými strategiemi

- Slávek 0.5A + 0.5B:
- Radek A: 0.5*2+0.5*(-3)=-0.5
- Radek B: 0.5*0+0.5*3=1.5
- *Pokud tedy Radek ví, že si Slávek hází korunou, bude hrát strategii B.*

		Slávek A	Slávek B
Radek	A	2	-3
Radek	B	0	3

Jak hrát se smíšenými strategiemi

- Slávek tedy bud hrát raději tak, aby obě Radkovy strategie měly stejný očekávaný výnos a volba kterékoliv mu tedy nepřinese žádnou výhodu: Slávek *xA* + *(1-x)A – metoda vyrovnaného očekávání*
- $x*2 + (1-x)(-3)=x*0+(1-x)*3 \Rightarrow x=3/4$
- Podobně Radek x=3/8

		Slávek A	Slávek B
	A	2	-3
Radek	B	0	3

Jak hrát se smíšenými strategiemi

- Slávek 3/4**A + 1/4*B, Radek 3/8*A + 5/8 *B*
- *Radek si zajistí očekávaný výnos aspoň 3/4, Slávek zajiistí, že Radkův výnos nebude vyšší než 3/4. => hodnota hry je ¾*
- Trik pro nalezení *optimální smíšené* strategie (rozmyslet, že platí!)

	Slávek A	Slávek B
A	2	-3
B	0	3

Větší maticové hry

- *2xm , nx2* – grafické řešení
- *3x3 – metoda vyrovnání očekávání, předtím je třeba ověřit dominanci a sedlové body*

		Slávek		
		A	B	C
	A	1	2	2
Radek	B	2	1	2
	C	2	2	0

Minimaxová věta

- Každá maticová hra *m x n* má řešení, tj. existuje jediná hodnota v (hodnota hry) a optimální strategie (čistá nebo smíšená) pro Radka a Slávka tak, že
  - Radek si zajistí aspoň *v*
  - *Slávek zajistí, že Radek nedostane víc než* ***v***
- Toto řešení lze vždy nalézt jako řešení nějaké podhry *k x k.*

Větší maticové hry

- *2xm , nx2* – grafické řešení
- *3x3 – metoda vyrovnání očekávání, předtím je třeba ověřit dominanci a sedlové body*
- rozdělte se do dvojic a zkuste následující hru

Slávek

		A	B	C	D	E	F
	A	4	-4	3	2	-3	3
Radek	B	-1	-1	-2	0	0	4
	C	-1	2	1	-1	2	-3

Aplikace: povstalci vs. policie

- *m* jednotek povstalců, *n* policie, 2 muniční sklady, které je třeba ochránit
- povstalci obsadí sklad, pokud na něj zaútočí větším počtem jednotek než, kterým je bráněn policií
- povstalci vítězí, pokud obsadí aspoň jeden sklad
- hry 2:3, 4:4, 7:9

Hry v rozšířené formě

- Game trees
- umožňují postupné tahy hráčů (hry v normální formě se hrají simultánně)
- Př. *triviální poker*
  - velký balíček pouze z A,K (eso, král)
  - Slávek si vezme kartu a **ztrojí vklad** nebo **vzdá**
  - Radek vezme kartu a **vyrovná** nebo **vzdá**
- informační množina
- nakreslete si strom, každá *stromová hra* se dá převést do maticové formy

Hry v rozšířené formě - aplikace

- soutěž na trhu
  - Zeus Music – industry leader
  - Athena Acoustics – malá firma, silný výzkum
- nový výrobek – hexaphonic sound system – není znám očekávaný odbyt (malý x velký)
- malý trh => lépe se prodává kvalita
- velký trh => na odbyt jdou levnější výrobky
- prozkoumáme vliv různých aspektů – různé informační množiny

Aplikace

1. oba výrobci tajně vyrábějí bez znalosti trhu
2. Athena je flexibilnější – počká na rozhodnutí leadera trhu a podle něj se zařídí (4 strategie)
3. Zeus provede analýzu trhu, Athena o něm ví, ale nezná výsledek
4. Athena udělá vlastní výzkum – hra 4 x 16 – stejný výsledek jako výše
5. Zeus provede analýzu trhu tak, že se o něm Athena nedozví => každý hraje jinou hru!

2. Hry s nekonstantním součtem

- Soupeření, ale i možnost spolupráce
- dominantní strategie, equilibrium – jako dříve (tzv. Nashova rovnováha)

		Slávek A	Slávek B
Radek	A	(2,3)	(3,2)
	B	(1,0)	(0,1)

- rovnováha (2,3) – zdánlivě symetrická hra

2. Hry s nekonstantním součtem

- hra bez rovnovážné situace v čistých strategiích
- Radek získá optimální smíšenou strategii 3/7A+4/7B ze Slávkovy hry (s nulovým součtem), podobně Slávek z Radkovy

		Slávek A	Slávek B
	A	(2,4)	(1,0)
Radek	B	(3,1)	(0,4)

Problémy Nashovy rovnováhy

- nebere ohled na vlastní výnosy a produkuje tak nízký výnos
- rovnováhy BA, AB níže dávají pro každého různý výnos a výsledná situace BB je nejhorší pro oba

		Slávek A	Slávek B
	A	(1,1)	(2,5)
Radek	B	(5,2)	(-1,-1)

Vězňovo dilema

- jediná rovnováha BB, navíc silná – příslušné strategie dominují
- AA je ale zjevně pro oba lepší – tzv. *Paretovo optimum*
- dominance – *individuální racionalita*
- Pareto – *kolektivní racionalita*

		Slávek A	Slávek B
	A	(3,3)	(-1,5)
Radek	B	(5,-1)	(0,0)

Vězňovo dilema s opakováním

- obecné PD – T>R>U>S, R>(S+T)/2
- pravděpodobnost opakování *p*, kdy je výhodné spolupracovat? (spec. př. unforgiving)
- strategie typu Tit For Tat

		A	B
	A	(R,R)	(S,T)
Radek	B	(T,S)	(U,U)

Vyhrožování a sliby

- některé hry náchylné na vyhrožování – např. *Chicken*
- Aplikace: distributor vs. odběratel (hra dvojic bez znalosti soupeřovy funkce, 10-15 kol)

3. Hry N hráčů

- zkoumá se tvorba koalic
- jak rozdělit zisk (náklady)?

- **Def.: Hra ve tvaru charakteristické funkce** - množina N hráčů, funkce $v: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbf{Z}$.
- Funkce *v obvykle* ***superaditivní***

Shapleyho hodnota

- Jak “férově” rozdělit zisk (náklady) dané koalice?
- Axiomy:

Axiom 1: *f* závisí pouze na *v* a respektuje symetrie

Axiom 2: pokud $v(S)=v(S\setminus i)$ pro všechny koalice *S*, hráč *i* **balvan**, který nic neovlivňuje a nic nedostane.

Axiom 3: hodnota *f* v součtu her je součtem hodnot *f* v jednotlivých hrách

Shapleyho hodnota

- Věta: Pro danou hru existuje jediná *f* splňující dané axiomy.
- Důkaz: na příkladu.
- Věta:
  $f(i)=1/n!\ \Sigma\ (s-1)!(n-s)![v(S)-v(S\backslash i)]$
  $s=|S|$, *suma přes i z S*

3. Shapleyho hodnota

- Př.: Shapleyho vektor síly – hlasování ve sněmovně (81,74,26,13,6)
- Př. výstavba hydroelektrárny v jižní Indii (1970)