Řetězové zlomky

HL Academy - Chata Lopata 2012

13.2. – 18.2.2012

Obsah

Motivace

- Pohádky tisíce a jedné noci
- Šahrazád pokrývala koberec hedvábnými čtverci
- Vždy největší možný čtverec, jestliže jich bylo víc, tak všechny
- Poměr délky ku šířce racionální číslo

Motivace pokračování

- Obdélník s rozměry 83x181.
- 2x 83x83, zbyde 83x15
- 5x 15x15, zbyde 8x15
- 1x 8x8, zbyde 8x7
- 1x 7x7, zbyde 1x7
- 7x 1x1, pokryto

$$\frac{181}{83} = \frac{83+83+15}{83} = 2 + \frac{1}{\frac{83}{15}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{15}{8}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{7}}}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}$$

Základní pojmy

definice

Řetězovým zlomkem nazýváme výraz

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \dots}}}$$

kde a_k, b_k pro $k = 1, 2, \dots$ mohou být reálná nebo komplexní čísla.

poznámka

Řetězový zlomek nazveme

- konečný, jestliže má konečný počet prvků.
- nekonečný, jestliže má nekonečný počet prvků.
- pravidelný, jestliže všechny čitatele se rovnají 1 a všechny jmenovatele jsou přirozená čísla.

poznámka

Místo psaní složitých výrazů častěji používáme pro řetězové zlomky tvar $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, číslům $a_1, a_2, \ldots, a_n$ říkáme prvky řetězového zlomku.

Spočítáme řetězové zlomky zepředu

Abychom mohli vytvořit rozumnou teorii, která by pokryla i nekonečné zlomky, musíme je umět počítat "zepředu".

$$a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1}$$

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{P_2}{Q_2}$$

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{P_3}{Q_3}$$

Sblížené zlomky

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} = \frac{a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_3a_4 + 1}{a_2a_3a_4 + a_2 + a_4} = \frac{P_4}{Q_4}$$

$$\vdots$$

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$$

definice

Zlomkům $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots, \frac{P_n}{Q_n}$ říkáme sblížené zlomky řetězového zlomku. Poslední sblížený zlomek $\frac{P_n}{Q_n}$ je roven hodnotě řetězového zlomku, kladnému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$.

Vlastnosti

věta

Pro každé $k \geq 2$ platí následující vztahy:

$$P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2}$$

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2},$$

pokud formálně položíme $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$.

Důkaz. Matematickou indukcí.

poznámka

Pro obecný řetězový zlomek platí podobné vzorce:
$P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}, \quad Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}$

příklad

Vypočítejte sblížené zlomky řetězového zlomku [2,2,1,1,2,2].

příklad

Vypočítejte sblížené zlomky řetězového zlomku [2,2,1,1,2,2].

Řešení. Nejprve sestavíme sblížené zlomky do tabulky.

a_k	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
P_k	$P_1 = a_1$	$P_2 = a_1 a_2 + 1$	$a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3$	$\cdots$	$a_n P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_k	$Q_1 = 1$	$Q_2 = a_2$	$a_2 a_3 + 1$	$\cdots$	$a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Dle vzorečků sestavíme tabulku pro tento řetězový zlomek.

a_k	2	2	1	1	2	2
P_k	2	5	7	12	31	74
Q_k	1	2	3	5	13	31

Euklidův algoritmus

Dosud jsme hledali vyjádření řetězového zlomku racionálním číslem. Teď obráceně, tj. najdeme k racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ řetězový zlomek. K tomu nám poslouží Euklidův algoritmus. (Algoritmus se v algebře používá na určení největšího společného dělitele.)

- $p = qa_1 + r_1$
- $q = r_1 a_2 + r_2$
- $r_1 = r_2 a_3 + r_3$
- $\dots$
- $r_{n-2} = r_{n-1} a_n + r_n$

$\cdots$ celkově dostaneme:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$$

- jediné možné vyjádření
- $a_n > 1$, neboť pro $a_n = 1$ dává poslední rovnost $r_{n-2} = r_{n-1}$
- $\Rightarrow$ jednoznačné vyjádření

příklad

Vypočítejte prvky řetězového zlomku $a_1, a_2, \cdots, a_n$ čísla $\frac{74}{31}$.

Nekonečné řetězové zlomky

V této kapitole se budeme zabývat nekonečnými pravidelnými řetězovými zlomky, tedy zlomky ve tvaru $[a_1, a_2, a_3, \cdots]$. Každému nekonečnému řetězovému zlomku odpovídá nekonečná posloupnost sblížených zlomků.

definice

Řekneme, že nekonečný řetězový zlomek konverguje, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha,$$

kde $\frac{P_n}{Q_n}$ jsou sblížené zlomky řetězového zlomku. Číslo α nazveme hodnotou řetězového zlomku.
Jestliže tato limita neexistuje, nebo je rovna $\pm\infty$, řekneme, že řetězový zlomek diverguje.

Iracionální čísla

věta

Každé iracionální číslo se dá vyjádřit ve tvaru nekonečného pravidelného řetězového zlomku.

příklad

Vypočtěte řetězový zlomek čísla π.

$$
\begin{aligned}
\pi &= 3 + \frac{1}{\alpha_1} \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\pi - 3} = 7 + \frac{1}{\alpha_2} \\
\alpha_2 &= \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} = 15 + \frac{1}{\alpha_3} \\
\alpha_3 &= \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} = 1 + \frac{1}{\alpha_4} \\
\alpha_4 &= \frac{106\pi - 333}{355 - 113\pi} = 292 + \frac{1}{\alpha_5}
\end{aligned}
$$

Periodické řetězové zlomky

definice

Periodickým řetězovým zlomkem nazýváme výraz

$$[a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n, a_{k+1}, \cdots]$$

a budeme ho značit

$$[a_1, a_2, \cdots, a_k, \overline{a_{k+1}, \cdots, a_n}].$$

Ryze periodickým je pak výraz

$$[a_1, a_2, \cdots, a_k, a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots, a_1] = [\overline{a_1, a_2, \cdots, a_k}].$$

věta

Pro řetězový zlomek čísla $\sqrt{r}, r \in \mathbb{N}, \sqrt{r} > 1, \sqrt{r} \in \mathbb{I}$ platí

$$\sqrt{r} = [a_1, \overline{a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, 2a_1}].$$

Tabulka odmocnin

$\sqrt{n}$	ŘZ $\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	ŘZ $\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	ŘZ $\sqrt{n}$
$\sqrt{2}$	$[1,\overline{2}]$	$\sqrt{14}$	$[3,\overline{1,2,1,6}]$	$\sqrt{26}$	$[5,\overline{10}]$
$\sqrt{3}$	$[1,\overline{1,2}]$	$\sqrt{15}$	$[3,\overline{1,6}]$	$\sqrt{27}$	$[5,\overline{5,10}]$
$\sqrt{5}$	$[2,\overline{4}]$	$\sqrt{17}$	$[4,\overline{8}]$	$\sqrt{28}$	$[5,\overline{3,2,3,10}]$
$\sqrt{6}$	$[2,\overline{2,4}]$	$\sqrt{18}$	$[4,\overline{4,8}]$	$\sqrt{29}$	$[5,\overline{2,1,1,2,10}]$
$\sqrt{7}$	$[2,\overline{1,1,1,4}]$	$\sqrt{19}$	$[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$	$\sqrt{30}$	$[5,\overline{2,10}]$
$\sqrt{8}$	$[2,\overline{1,4}]$	$\sqrt{20}$	$[4,\overline{2,8}]$	$\sqrt{31}$	$[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}$
$\sqrt{10}$	$[3,\overline{6}]$	$\sqrt{21}$	$[4,\overline{1,1,2,1,1,8}]$	$\sqrt{32}$	$[5,\overline{1,1,1,10}]$
$\sqrt{11}$	$[3,\overline{3,6}]$	$\sqrt{22}$	$[4,\overline{1,2,4,2,1,8}]$	$\sqrt{33}$	$[5,\overline{1,2,1,10}]$
$\sqrt{12}$	$[3,\overline{2,6}]$	$\sqrt{23}$	$[4,\overline{1,3,1,8}]$	$\sqrt{34}$	$[5,\overline{1,4,1,10}]$
$\sqrt{13}$	$[3,\overline{1,1,1,1,6}]$	$\sqrt{24}$	$[4,\overline{1,8}]$	$\sqrt{35}$	$[5,\overline{1,10}]$

definice

Kvadratická iracionalita říkáme výrazu

$$\frac{p \pm \sqrt{r}}{q},$$

kde $p, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}, r \neq 1$ a $\sqrt{r} \in \mathbb{I}$. Každý takový výraz je kořenem nějaké kvadratické rovnice.

věta [Lagrangeova]

Každý periodický řetězový zlomek je hodnotou nějaké kvadratické iracionality a naopak každou kvadratickou iracionalitu lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem.

příklad

Vypočtěte řetězový zlomek čísla $\alpha = \frac{11-\sqrt{7}}{3}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{11-\sqrt{7}}{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_1}\\
\alpha_1 &= \frac{3}{5-\sqrt{7}} = \frac{5+\sqrt{7}}{6} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}\\
\alpha_2 &= \frac{6}{\sqrt{7}-1} = 1+\sqrt{7} = 3 + \frac{1}{\alpha_3}\\
\alpha_3 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{2+\sqrt{7}}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_4}\\
\alpha_4 &= \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{1+\sqrt{7}}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_5}\\
\alpha_5 &= \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{1+\sqrt{7}}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_6}\\
\alpha_6 &= \frac{3}{\sqrt{7}-2} = 2+\sqrt{7} = 4 + \frac{1}{\alpha_7}\\
\alpha_7 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} = 1 + \frac{1}{\alpha_8}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Řešení neurčité rovnice prvního stupně

definice

Rovnici

$$ax + by = c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ jsou známá čísla, nazýváme neurčitou rovnicí prvního stupně.

- Má nekonečně mnoho řešení.
- Celočíselná řešení pouze tehdy, jestliže $NSD(a, b)|c$, můžeme předpokládat, že jsou nesoudělná.
- Nalezení dvojice kořenů pomocí řetězových zlomků.

Nalezení dvojice kořenů pomocí řet.zl.

1. Obecné řešení rovnice $x = x_0 - bt, \qquad y = y_0 + at$.
2. Najdeme prvky řetězového zlomku $\frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n}$.
3. Určíme předposlední sblížený zlomek a dosadíme do vzorce $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^n$.
4. Dostáváme

$$x_0 = (-1)^n Q_{n-1} c, \qquad y_0 = (-1)^{n-1} P_{n-1} c,$$

obecně tedy

$$x = (-1)^n Q_{n-1} c - Q_n t, \qquad y = (-1)^{n-1} P_{n-1} c + P_n t,$$

kde t je libovolné celé číslo.

příklad

Řešte rovnici $27x + 17y = 1$.

Díky za pozornost:o)