

Kombinatorické hry

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

2. 9. 2008

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Kombinatorická hra je hra **dvou** hráčů s úplnou informací (*žádné skryté ani simultánní tahy*), bez náhody (*tj. nikoliv kámen-nůžky-papír, vrhcáby, poker apod.*). Hra je určena možnými stavy (pozicemi), ve kterých se může nacházet, a tím, který hráč je zrovna na tahu. Hráči se obvykle v tazích střídají do té doby, než je dosažen koncový stav – pak je jeden z hráčů prohlášen za vítěze a druhý za poraženého.

Kombinatorická hra je hra **dvou** hráčů s úplnou informací (*žádné skryté ani simultánní tahy*), bez náhody (*tj. nikoliv kámen-nůžky-papír, vrhcáby, poker apod.*). Hra je určena možnými stavy (pozicemi), ve kterých se může nacházet, a tím, který hráč je zrovna na tahu. Hráči se obvykle v tazích střídají do té doby, než je dosažen koncový stav – pak je jeden z hráčů prohlášen za vítěze a druhý za poraženého.

My se navíc budeme zabývat pouze hrami **nestrannými** (angl. *impartial*), kde mají oba hráči k dispozici stejné tahy (tím jsou vyloučeny např. šachy nebo dáma).

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

- 1 Hraje se s 21 kameny.

Jednoduchá hra na úvod

- 1 Hraje se s 21 kameny.
- 2 Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.

Jednoduchá hra na úvod

- 1 Hraje se s 21 kameny.
- 2 Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.
- 3 Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává (tj. hráč, který nemůže táhnout, prohrál).

Jednoduchá hra na úvod

- 1 Hraje se s 21 kameny.
- 2 Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.
- 3 Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává (tj. hráč, který nemůže táhnout, prohrál).

Jednoduchá hra na úvod

- 1 Hraje se s 21 kameny.
- 2 Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.
- 3 Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává (tj. hráč, který nemůže táhnout, prohrál).

Naším cílem je zjistit, jestli si některý z hráčů může **vynutit** vítězství.

Při analýze budeme postupovat zpětnou indukcí (odvozením):

- jsou-li na stole 1-3 kameny, pak hráč na tahu **vyhrává**
- jsou-li na stole 4 kameny, pak hráč na tahu **prorává** (nemá jinou možnost, než dalším tahem uvést hru do stavu, kdy jsou na stole 1-3 kameny a vyhrává tedy jeho soupeř)
- je-li na stole 5-7 kamenů, hráč na tahu vyhrává (může odebrat tolik kamenů, aby zbyly 4)
- atd.

Analýza jednoduché hry

Při analýze budeme postupovat zpětnou indukcí (odvozením):

- jsou-li na stole 1-3 kameny, pak hráč na tahu **vyhrává**
- jsou-li na stole 4 kameny, pak hráč na tahu **prohrává** (nemá jinou možnost, než dalším tahem uvést hru do stavu, kdy jsou na stole 1-3 kameny a vyhrává tedy jeho soupeř)
- je-li na stole 5-7 kamenů, hráč na tahu vyhrává (může odebrat tolik kamenů, aby zbyly 4)
- atd.

U této hry je tedy poměrně snadno vidět, že stav s 0,4,8,12,...,20 kameny jsou stav, kdy hráč na tahu prohrává.

Analýza jednoduché hry

Při analýze budeme postupovat zpětnou indukcí (odvozením):

- jsou-li na stole 1-3 kameny, pak hráč na tahu **vyhrává**
- jsou-li na stole 4 kameny, pak hráč na tahu **prohrává** (nemá jinou možnost, než dalším tahem uvést hru do stavu, kdy jsou na stole 1-3 kameny a vyhrává tedy jeho soupeř)
- je-li na stole 5-7 kamenů, hráč na tahu vyhrává (může odebrat tolik kamenů, aby zbyly 4)
- atd.

U této hry je tedy poměrně snadno vidět, že stav s 0,4,8,12,...,20 kameny jsou stav, kdy hráč na tahu prohrává.

V naší hře tedy **vítězí hráč, který začíná** – stačí v 1. tahu odebrat jeden kámen a poté postupovat tak, aby po jeho tahu zbyl počet kamenů, který je násobkem 4.

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

- 1 Hrají 2 hráči.

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

- 1 Hrají 2 hráči.
- 2 Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

- 1 Hrají 2 hráči.
- 2 Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
- 3 Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

- 1 Hrají 2 hráči.
- 2 Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
- 3 Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).
- 4 Hráči se ve svých tazích střídají.

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

- 1 Hrají 2 hráči.
- 2 Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
- 3 Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).
- 4 Hráči se ve svých tazích střídají.
- 5 Hra končí ve chvíli, kdy je dosažen stav, v němž není možný další tah. Při **normální hře** (normal play rule) pak vyhrává hráč, který učinil poslední tah, při **nuzné hře** (misère play rule) takový hráč prohrává.

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

- 1 Hrají 2 hráči.
- 2 Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
- 3 Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).
- 4 Hráči se ve svých tazích střídají.
- 5 Hra končí ve chvíli, kdy je dosažen stav, v němž není možný další tah. Při **normální hře** (normal play rule) pak vyhrává hráč, který učinil poslední tah, při **nuzné hře** (misère play rule) takový hráč prohrává.
- 6 (**konečnost hry**) Hra skončí po konečném počtu tahů bez ohledu na zahrávané tahy.

P-stavy a N-stavy

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsem odvodili, že $0, 4, 8, \dots, 20$ jsou stavy, v nichž vyhrává **P**ředchozí hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **N**ásledující hráč.

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsem odvodili, že $0, 4, 8, \dots, 20$ jsou stavy, v nichž vyhrává **P**ředchozí hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **N**ásledující hráč. P-stavy a N-stavy se dají u námi studovaných kombinatorických her odvodit podle následujícího (induktivního) postupu:

Krok 1 Všechny koncové stavy označ jako P-stavy (v případě misère jako N-stavy).

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsem odvodili, že $0, 4, 8, \dots, 20$ jsou stavy, v nichž vyhrává **Předchozí** hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **Následující** hráč. P-stavy a N-stavy se dají u námi studovaných kombinatorických her odvodit podle následujícího (induktivního) postupu:

- Krok 1** Všechny koncové stavy označ jako P-stavy (v případě míšère jako N-stavy).
- Krok 2** Všechny stavy, z nichž **existuje** tah do P-stavu, označ jako N-stavy.

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsem odvodili, že $0, 4, 8, \dots, 20$ jsou stavy, v nichž vyhrává **Předchozí** hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **Následující** hráč. P-stavy a N-stavy se dají u námi studovaných kombinatorických her odvodit podle následujícího (induktivního) postupu:

- Krok 1** Všechny koncové stavy označ jako P-stavy (v případě míšère jako N-stavy).
- Krok 2** Všechny stavy, z nichž **existuje** tah do P-stavu, označ jako N-stavy.
- Krok 3** Označ jako P-stav takový stav, z nějž všechny možné tahy vedou do N-stavů.

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim**
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Nejznámější odebírací hrou je **Nim**. V klasické variantě se hraje se třemi hromádkami kamenů (např. 5,7 a 9 kamenů). Tah spočívá ve výběru hromádky a odebrání libovolného (ale nenulového) počtu kamenů z této hromádky. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen.

Nejznámější odebírací hrou je **Nim**. V klasické variantě se hraje se třemi hromádkami kamenů (např. 5, 7 a 9 kamenů). Tah spočívá ve výběru hromádky a odebrání libovolného (ale nenulového) počtu kamenů z této hromádky. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen.

Příklad

Hru je možné si vyzkoušet na adrese

<http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html> (lokálně: zde)

Nejznámější odebrací hrou je **Nim**. V klasické variantě se hraje se třemi hromádkami kamenů (např. 5,7 a 9 kamenů). Tah spočívá ve výběru hromádky a odebrání libovolného (ale nenulového) počtu kamenů z této hromádky. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen.

Příklad

Hru je možné si vyzkoušet na adrese

<http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html> (lokálně: zde)

První analýza

- Jediný koncový stav je $(0,0,0)$.
- Stav s jedinou neprázdnou hromádkou jsou zřejmě N-stavy.
- (Tweedledum-Tweedledee strategie) Při dvou neprázdných hromádkách jsou P-stavy právě ty stavy, v nichž obě hromádky mají stejný počet kamenů.
- N-stavy: $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$; P-stav: $(1,2,3)$.

Jak poznat P- a N-stavy jednodušeji?

Induktivní metoda popsaná dříve sice vede k řešení, ale zjistit s její pomocí, jestli je např. stav (16,27,32) P-stavem je bez pomoci počítače obtížné. Existuje přitom velmi elegantní způsob nejen pro to, jak určit P- a N-stavy, ale zároveň na určení vítězné strategie (tj. návod na určení tahu, který vede z daného N-stavu do P-stavu).

Jak poznat P- a N-stavy jednodušeji?

Induktivní metoda popsaná dříve sice vede k řešení, ale zjistit s její pomocí, jestli je např. stav (16,27,32) P-stavem je bez pomoci počítače obtížné. Existuje přitom velmi elegantní způsob nejen pro to, jak určit P- a N-stavy, ale zároveň na určení vítězné strategie (tj. návod na určení tahu, který vede z daného N-stavu do P-stavu). Tato metoda je založena na zápisu přirozených čísel ve dvojkové soustavě (tzv. binárním zápisu) a na operaci XOR (sčítání ve dvojkové soustavě **bez** přenosu).

Definice (Nim-součet)

Nim-součtem čísel $x = (x_m \dots x_0)_2$ a $y = (y_m \dots y_0)_2$ je číslo $x \oplus y = z = (z_m \dots z_0)_2$, kde $z_k = x_k + y_k \pmod 2$, pro $k = 0, \dots, m$.

Příklad

$$16 \oplus 27 = (10000)_2 \oplus (11011)_2 = (01011)_2 = 11.$$

Poznámka (Algebraická)

Nim-součet je na množině nezáporných celých čísel *komutativní* a *asociativní*, 0 je vzhledem k této operaci neutrální prvek ($0 \oplus x = x$) a každý prvek je sám k sobě opačný ($x \oplus x = 0$). (\mathbb{N}_0, \oplus) je tedy *komutativní grupa*, kde platí tzv. *zákony o krácení*: $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$.

Poznámka (Algebraická)

Nim-součet je na množině nezáporných celých čísel *komutativní* a *asociativní*, 0 je vzhledem k této operaci neutrální prvek ($0 \oplus x = x$) a každý prvek je sám k sobě opačný ($x \oplus x = 0$). (\mathbb{N}_0, \oplus) je tedy *komutativní grupa*, kde platí tzv. *zákony o krácení*: $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$.

Věta (Bouton, 1902)

Stav (x, y, z) v Nimu je P-stavem právě tehdy, když platí

$$x \oplus y \oplus z = 0.$$

Poznámka (Algebraická)

Nim-součet je na množině nezáporných celých čísel *komutativní* a *asociativní*, 0 je vzhledem k této operaci neutrální prvek ($0 \oplus x = x$) a každý prvek je sám k sobě opačný ($x \oplus x = 0$). (\mathbb{N}_0, \oplus) je tedy *komutativní grupa*, kde platí tzv. *zákony o krácení*: $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$.

Věta (Bouton, 1902)

Stav (x, y, z) v Nimu je P-stavem právě tehdy, když platí

$$x \oplus y \oplus z = 0.$$

Příklad

Protože je $16 \oplus 27 \oplus 32 = (10000)_2 \oplus (11011)_2 \oplus (100000)_2 = (01011)_2 \oplus (100000)_2 = (101011)_2 = 43$,
je $(16, 27, 32)$ N-pozicí.

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.

K tomu si stačí uvědomit, co vlastně Boutonova věta říká – P-stav je takový stav, že když zapíšeme počty kamenů binárně pod sebe, tak v každém sloupci bude sudý počet jedniček. Je poměrně snadno vidět, jak v takovém zápisu dospět z N-stavu do P-stavu:

$$\begin{array}{rcccccc} 16 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 32 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.

K tomu si stačí uvědomit, co vlastně Boutonova věta říká – P-stav je takový stav, že když zapíšeme počty kamenů binárně pod sebe, tak v každém sloupci bude sudý počet jedniček. Je poměrně snadno vidět, jak v takovém zápisu dospět z N-stavu do P-stavu:

$$\begin{array}{rcccccc} 16 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{1} & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.

K tomu si stačí uvědomit, co vlastně Boutonova věta říká – P-stav je takový stav, že když zapíšeme počty kamenů binárně pod sebe, tak v každém sloupci bude sudý počet jedniček. Je poměrně snadno vidět, jak v takovém zápisu dospět z N-stavu do P-stavu:

$$\begin{array}{rcccccc} 16 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 11 = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Protože odebíráním kamenů čísla zmenšujeme, je třeba uvážit nejlevější sloupec, kde je lichý počet jedniček a zmenšit některé z čísel, majících v tomto sloupci jedničku (v našem případě nemáme na výběr), a toto číslo zmenšit tak, aby počty jedniček ve všech sloupcích byly sudé – to je zřejmě vždy možné (za předpokladu, že je nim-součet nenulový).

Důkaz Boutonovy věty

Nim s jednou hromádkou je triviální,

Důkaz Boutonovy věty

Nim s jednou hromádkou je triviální,
se dvěma snadný (Tweedledum-Tweedledee),

Důkaz Boutonovy věty

Nim s jednou hromádkou je triviální,
se dvěma snadný (Tweedledum-Tweedledee),
se třemi už mnohem obtížnější.

Nim s jednou hromádkou je triviální,
se dvěma snadný (Tweedledum-Tweedledee),
se třemi už mnohem obtížnější.

Co když přidáme ještě další hromádky? Možná překvapivě je situace stejná
jako v případě tří hromádek (a vlastně i v případě jedné a dvou hromádek)
– daný stav je P-stavem, právě když je nim-součet počtu kamenů
v jednotlivých hromádkách roven 0.

Důkaz tohoto tvrzení je poměrně snadný a vychází z rekurzivní definice P-stavů a N-stavů.

Důkaz obecné Boutonovy věty.

- Krok 1** Všechny koncové stavy (z definice P-stavy) mají nim-součet roven 0 (vždyť máme jediný koncový stav $(0, 0, \dots, 0)$, který splňuje $0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$).
- Krok 2** Z každého stavu s nenulovým nim-součtem existuje tah do stavu s nulovým nim-součtem (viz předchozí příklad).
- Krok 3** Každý tah ze stavu s nulovým nim-součtem vede do stavu s nenulovým nim-součtem: kdyby pro tah $(x, y, z, \dots) \rightarrow (x', y, z)$, kde $x' < x$, platilo $x \oplus y \oplus z \oplus \dots = 0 = x' \oplus y \oplus z \oplus \dots$, pak díky pravidlu o krácení dostáváme $x = x'$.

Proto je množina stavů s nulovým nim-součtem právě množinou P-stavů.

Důkaz tohoto tvrzení je poměrně snadný a vychází z rekurzivní definice P-stavů a N-stavů.

Důkaz obecné Boutonovy věty.

- Krok 1** Všechny koncové stavy (z definice P-stavy) mají nim-součet roven 0 (vždyť máme jediný koncový stav $(0, 0, \dots, 0)$, který splňuje $0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$).
- Krok 2** Z každého stavu s nenulovým nim-součtem existuje tah do stavu s nulovým nim-součtem (viz předchozí příklad).
- Krok 3** Každý tah ze stavu s nulovým nim-součtem vede do stavu s nenulovým nim-součtem: kdyby pro tah $(x, y, z, \dots) \rightarrow (x', y, z)$, kde $x' < x$, platilo $x \oplus y \oplus z \oplus \dots = 0 = x' \oplus y \oplus z \oplus \dots$, pak díky pravidlu o krácení dostáváme $x = x'$.

Proto je množina stavů s nulovým nim-součtem právě množinou P-stavů. Zároveň je vidět, že počet vítězných tahů z N-stavu do některého P-stavu je přesně roven počtu jedniček v nejlevějším sloupci s lichým počtem jedniček (speciálně, počet vítězných tahů je vždy lichý!). □

Pokud hrajeme *nuznou* hru, kdy hráč, který táhne naposled, prohrává, je situace často o dost obtížnější. [Wiki] přitom uvádí, že Nim se obvykle hraje právě ve své *misère* variantě.

Zkuste si rozmyslet, jaké jsou P-stavy a N-stavy v nuzné hře, kdy konečný stav je N-stavem a jak hrát v N-stavech, abyste si zaručili výhru.

Pokud hrajeme *nuznou* hru, kdy hráč, který táhne naposled, prohrává, je situace často o dost obtížnější. [Wiki] přitom uvádí, že Nim se obvykle hraje právě ve své *misère* variantě.

Zkuste si rozmyslet, jaké jsou P-stavy a N-stavy v nuzné hře, kdy konečný stav je N-stavem a jak hrát v N-stavech, abyste si zaručili výhru.

Hraje se stejně jako v případě normální hry, dokud je alespoň na dvou hromádkách více než jeden kámen. V situaci, kdy soupeřův tah přivede hru do stavu, kdy je právě na jedné hromádce více než jeden kámen, vezměte z této hromádky tolik kamenů, aby počet hromádek s právě jedním kamenem byl lichý.

Nimble

Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném $0,1,2,\dots$. Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna i více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čtvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm nějaké mince jsou). Koncový stav je ve chvíli, kdy jsou všechny mince na čtverečku s číslem 0, hráč, který táhl poslední, vyhrává.

Nimble

Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném $0,1,2,\dots$. Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna i více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čtvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm nějaké mince jsou). Koncový stav je ve chvíli, kdy jsou všechny mince na čtverečku s číslem 0, hráč, který táhl poslední, vyhrává.

Převrácení želv (Turning turtles)

Mince jsou náhodně poskládány do řady, některé z nich vzhůru lícem, jiné rubem. Tak spočívá v otočení některé mince z líce na rub a volitelně v otočení jiné mince vlevo od první (z líce na rub nebo z rubu na líc). Vyhrává hráč, který na konci svého tahu dosáhne stavu, že jsou všechny mince otočeny rubem vzhůru. Hru si můžete zahrát na <http://www.chlond.demon.co.uk/Coins.html> (lokálně zde).

Nimble

Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném $0,1,2,\dots$. Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna i více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čtvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm nějaké mince jsou). Koncový stav je ve chvíli, kdy jsou všechny mince na čtverečku s číslem 0, hráč, který táhl poslední, vyhrává.

Převrácení želv (Turning turtles)

Mince jsou náhodně poskládány do řady, některé z nich vzhůru lícem, jiné rubem. Tak spočívá v otočení některé mince z líce na rub a volitelně v otočení jiné mince vlevo od první (z líce na rub nebo z rubu na líc). Vyhrává hráč, který na konci svého tahu dosáhne stavu, že jsou všechny mince otočeny rubem vzhůru. Hru si můžete zahrát na <http://www.chlond.demon.co.uk/Coins.html> (lokálně zde).

Obě hry se snadno převedou na klasický Nim (promyslete!).

Mooreův Nim

Nim_k se hraje stejně jako klasický Nim s tím rozdílem, že hráč ve svém tahu odebírá kameny z libovolných k hromádek (z každé hromádky může odebrat jiný počet kamenů, případně neodebrat žádný), přitom musí celkově odebrat alespoň jeden kámen. Je vidět, že Nim_1 je klasický Nim.

Mooreův Nim

Nim_k se hraje stejně jako klasický Nim s tím rozdílem, že hráč ve svém tahu odebírá kameny z libovolných k hromádek (z každé hromádky může odebrat jiný počet kamenů, případně neodebrat žádný), přitom musí celkově odebrat alespoň jeden kámen. Je vidět, že Nim_1 je klasický Nim.

Věta (Moore, 1910)

Stav (x, y, z, \dots) je v Nim_k P-stav, právě když je počet jedniček na všech místech binárního zápisu čísel x, y, z, \dots násobkem $k + 1$ (tj. x, y, z zapíšeme binárně a sčítáme bez přenosu v soustavě o základu $k + 1$).

Nimu podobné hry

Mooreův Nim

Nim_k se hraje stejně jako klasický Nim s tím rozdílem, že hráč ve svém tahu odebírá kameny z libovolných k hromádek (z každé hromádky může odebrat jiný počet kamenů, případně neodebrat žádný), přitom musí celkově odebrat alespoň jeden kámen. Je vidět, že Nim_1 je klasický Nim.

Věta (Moore, 1910)

Stav (x, y, z, \dots) je v Nim_k P-stav, právě když je počet jedniček na všech místech binárního zápisu čísel x, y, z, \dots násobkem $k + 1$ (tj. x, y, z zapíšeme binárně a sčítáme bez přenosu v v soustavě o základu $k + 1$).

Příklad (Northcottova hra)

Hraje se na šachovnici s bílými a černými pěšci, kteří táhnou ve sloupcích vpřed i vzad (bez přeskakování). Kdo nemůže táhnout prohrává.^a

^aVšimněte si, že ze **nejde** o nestrannou hru!

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech**
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Už při předchozím uvažování o kombinatorických hrách bylo vidět, že prováděné myšlenky se dají docela dobře reprezentovat pomocí tzv. **orientovaných grafů**, kde jednotlivé stavy hry jsou reprezentovány vrcholy a tahy mezi těmito stavy tvoří (orientované) hrany. Zkoumání her na orientovaných grafech nám umožní o jednotlivých stavech hry říci více než jen to, jestli jde o P-stav nebo N-stav.

Už při předchozím uvažování o kombinatorických hrách bylo vidět, že prováděné myšlenky se dají docela dobře reprezentovat pomocí tzv. **orientovaných grafů**, kde jednotlivé stavy hry jsou reprezentovány vrcholy a tahy mezi těmito stavy tvoří (orientované) hrany. Zkoumání her na orientovaných grafech nám umožní o jednotlivých stavech hry říci více než jen to, jestli jde o P-stav nebo N-stav.

Definice

Orientovaný graf je dvojice $G = (V, F)$, kde V je neprázdná množina vrcholů (stavů) a F je zobrazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřadí podmnožinu $F(v) \subseteq H$. Pro dané v je $F(v)$ množinou následníků v , tj. vrcholů, do nichž se lze dostat jedním tahem z v . Je-li $F(v) = \emptyset$, nazývá se stav v koncový.

Už při předchozím uvažování o kombinatorických hrách bylo vidět, že prováděné myšlenky se dají docela dobře reprezentovat pomocí tzv. **orientovaných grafů**, kde jednotlivé stavy hry jsou reprezentovány vrcholy a tahy mezi těmito stavy tvoří (orientované) hrany.

Zkoumání her na orientovaných grafech nám umožní o jednotlivých stavech hry říci více než jen to, jestli jde o P-stav nebo N-stav.

Definice

Orientovaný graf je dvojice $G = (V, F)$, kde V je neprázdná množina vrcholů (stavů) a F je zobrazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřadí podmnožinu $F(v) \subseteq H$. Pro dané v je $F(v)$ množinou následníků v , tj. vrcholů, do nichž se lze dostat jedním tahem z v . Je-li $F(v) = \emptyset$, nazývá se stav v koncový.

Hra na grafu G má následující pravidla:

- 1. hráč začíná v předem určeném stavu v_0 a hráči se ve svých tazích střídají.
- Ve stavu v volí hráč, který je na tahu, další stav z množiny $F(v)$.
- Prohrává hráč, který je na tahu ve stavu v , kde $F(v) = \emptyset$.

Sprague-Grundyho funkce

Grafové hry mohou být zkoumány analogicky jako Nim prostřednictvím P- a N-stavů. Ukážeme si ale i jiný, obecnější postup pomocí tzv. Sprague-Grundyho funkce.

Sprague-Grundyho funkce

Grafové hry mohou být zkoumány analogicky jako Nim prostřednictvím P- a N-stavů. Ukážeme si ale i jiný, obecnější postup pomocí tzv. Sprague-Grundyho funkce.

Definice (SG-funkce, SG-hodnota)

Sprague-Grundyho funkce grafu $G = (V, F)$ je funkce $g : V \rightarrow \mathbb{N}_0$ definovaná rekurzívně předpisem

$$g(v) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : n \neq g(u) \text{ pro všechna } u \in F(v)\}.$$

Alternativně, s využitím funkce mex (*minimal excludant* = nejmenší vyloučený; výsledkem je nejmenší nezáporné celé číslo neobsažené v argumentu funkce) můžeme úsporněji psát

$$g(v) = \text{mex}\{g(u) : u \in F(v)\}.$$

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

Krok 1 Každý koncový stav hodnotu SG-funkce rovnou 0.

Krok 2 Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.

Krok 3 Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

Krok 1 Každý koncový stav hodnotu SG-funkce rovnou 0.

Krok 2 Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.

Krok 3 Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Zdá se, že pojem SG-funkce je ekvivalentní analýze P- a N-stavů, ale brzy si ukážeme, že konkrétní hodnota SG-funkce je významnou přidanou informací.

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

Krok 1 Každý koncový stav hodnotu SG-funkce rovnou 0.

Krok 2 Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.

Krok 3 Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Zdá se, že pojem SG-funkce je ekvivalentní analýze P- a N-stavů, ale brzy si ukážeme, že konkrétní hodnota SG-funkce je významnou přidanou informací.

Příklad

Určíme SG-hodnotu stavů v naší jednoduché odečítací hře (21 kamenů, odebíráme 1, 2 nebo 3).

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

Krok 1 Každý koncový stav hodnotu SG-funkce rovnou 0.

Krok 2 Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.

Krok 3 Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Zdá se, že pojem SG-funkce je ekvivalentní analýze P- a N-stavů, ale brzy si ukážeme, že konkrétní hodnota SG-funkce je významnou přidanou informací.

Příklad

Určíme SG-hodnotu stavů v naší jednoduché odečítací hře (21 kamenů, odebíráme 1,2 nebo 3).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Tj. $g(x) = x \pmod{4}$.

Wythoffova hra

Hráči sedící na stejné straně šachovnice střídavě táhnou s dámou, táhnout mohou pouze ve sloupci dolů, v řadě doleva nebo diagonálně šikmo dolů. Hráč, který táhne poslední vyhrává. Hru si můžete zahrát na <http://www.chlond.demon.co.uk/Queen.html> (lokálně zde).

Wythoffova hra

Hráči sedící na stejné straně šachovnice střídavě táhnou s dámou, táhnout mohou pouze ve sloupci dolů, v řadě doleva nebo diagonálně šikmo dolů. Hráč, který táhne poslední vyhrává. Hru si můžete zahrát na <http://www.chlond.demon.co.uk/Queen.html> (lokálně zde).

Dvourozměrný Nim

Hraje se na čtvercové síti v prvním kvadrantu, kde je rozmístěn konečný počet kamenů (i více na jednom poli). Tah spočívá v přesunu jednoho kamene buď vlevo ve stejném řádku nebo na libovolné pole v některém nižším řádku.

Wythoffova hra

Hráči sedící na stejné straně šachovnice střídavě táhnou s dámou, táhnout mohou pouze ve sloupci dolů, v řadě doleva nebo diagonálně šikmo dolů. Hráč, který táhne poslední vyhrává. Hru si můžete zahrát na <http://www.chlond.demon.co.uk/Queen.html> (lokálně zde).

Dvourozměrný Nim

Hraje se na čtvercové síti v prvním kvadrantu, kde je rozmístěn konečný počet kamenů (i více na jednom poli). Tah spočívá v přesunu jednoho kamene buď vlevo ve stejném řádku nebo na libovolné pole v některém nižším řádku.

Zkuste si spočítat Sprague-Grundyho funkce pro tyto hry.

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her**
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Přirozeným způsobem, jak z kombinatorických her vytvářet hry složitější, je tzv. **(disjunktní) sčítání her**. Tah hráče v součtu daných her spočívá v tom, že zvolí jednu z daných her a v ní učiní svůj tah. Jako dobrá ilustrace tohoto pojmu poslouží klasický tříhromádkový Nim, který je součtem 3 (triviálních) jednohromádkových Nimů.

Přirozeným způsobem, jak z kombinatorických her vytvářet hry složitější, je tzv. **(disjunktní) sčítání her**. Tah hráče v součtu daných her spočívá v tom, že zvolí jednu z daných her a v ní učiní svůj tah. Jako dobrá ilustrace tohoto pojmu poslouží klasický tříhromádkový Nim, který je součtem 3 (triviálních) jednohromádkových Nimů.

Definice (Součet grafových her)

Mějme n grafů $G_1 = (V_1, F_1), \dots, G_n = (V_n, F_n)$. **Součtem** $G = G_1 + \dots + G_n$ grafů G_1, \dots, G_n nazveme graf $G = (V, F)$, kde $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ je množina všech n -tic (v_1, \dots, v_n) , kde $v_i \in V_i$ a pro vrchol $v = (v_1, \dots, v_n)$ je množina následníků

$$\begin{aligned} F(v) = & F_1(v_1) \times \{v_2\} \times \dots \times \{v_n\} \cup \\ & \cup \{v_1\} \times F_2(v_2) \times \dots \times \{v_n\} \cup \\ & \dots \\ & \cup \{v_1\} \times \{v_2\} \times \dots \times F_n(v_n) \end{aligned}$$

Následující věta je významným zobecněním Boutonovy věty – ukazuje, že SG-hodnotu stavu v součtu grafů dostaneme jako nim-součet SG-hodnot jednotlivých komponent.

Věta (Sprague, 1936; Grundy, 1939)

Mějme grafy G_1, \dots, G_n s SG-funkcemi g_1, \dots, g_n . Pak graf $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ má Sprague-Grundyho funkci

$$g(v_1, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus \dots \oplus g_n(v_n).$$

Následující věta je významným zobecněním Boutonovy věty – ukazuje, že SG-hodnotu stavu v součtu grafů dostaneme jako nim-součet SG-hodnot jednotlivých komponent.

Věta (Sprague, 1936; Grundy, 1939)

Mějme grafy G_1, \dots, G_n s SG-funkcemi g_1, \dots, g_n . Pak graf $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ má Sprague-Grundyho funkci $g(v_1, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$.

Důkaz této věty je podobný důkazu Boutonovy věty (zkuste sami!).

Následující věta je významným zobecněním Boutonovy věty – ukazuje, že SG-hodnotu stavu v součtu grafů dostaneme jako nim-součet SG-hodnot jednotlivých komponent.

Věta (Sprague, 1936; Grundy, 1939)

Mějme grafy G_1, \dots, G_n s SG-funkcemi g_1, \dots, g_n . Pak graf $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ má Sprague-Grundyho funkci $g(v_1, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$.

Důkaz této věty je podobný důkazu Boutonovy věty (zkuste sami!).

Poznámka

Důležitým důsledkem této věty je skutečnost, že každá nestranná kombinatorická hra se jako sčítanec v součtu her chová stejně jako jako hra Nim s jednou hromádkou velikosti rovné SG-funkci této hry.

Jinými slovy: každá nestranná hra je ekvivalentní Nimu.

Příklad (Součet odečítacích her)

Označme $G(m)$ tzv. *odečítací hru* (zobecnění naší úvodní jednoduché hry, kdy lze z hromádky odebírat 1 až m kamenů).^a

Snadno je vidět, že $G(m)$ má SG-funkci rovnou $g_m(v) = v \bmod m + 1$.
Uvažme hru $G = G(3) + G(5) + G(7)$ s počátečním stavem $(9, 10, 14)$.

Příklad (Součet odečítacích her)

Označme $G(m)$ tzv. *odečítací hru* (zobecnění naší úvodní jednoduché hry, kdy lze z hromádky odebírat 1 až m kamenů).^a

Snadno je vidět, že $G(m)$ má SG-funkci rovnou $g_m(v) = v \bmod m + 1$. Uvažme hru $G = G(3) + G(5) + G(7)$ s počátečním stavem $(9, 10, 14)$.

Snadno vypočteme SG-funkci

$$g((9, 10, 14)) = g_3(9) \oplus g_5(10) \oplus g_7(14) = 1 \oplus 4 \oplus 6 = 3.$$

Počáteční stav je tedy N-stavem.

^aObecně lze v odečítacích hrách odebírat počet kamenů, který je prvkem množiny S ; zde $S = \{1, \dots, m\}$.

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$\begin{array}{r} g_3(9) = 1 = 0 \ 0 \ 1 \\ g_5(10) = 4 = 1 \ 0 \ 0 \\ g_7(14) = 6 = 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$\begin{array}{rcccc} g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\ g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\ 5 = & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebnou hodnotu 5 dosáhneme odebráním jednoho kamene ze třetí hromádky, neboť pak $g_7(13) = 5$.

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$\begin{array}{rcccc} g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\ g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\ 5 = & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebnou hodnotu 5 dosáhneme odebráním jednoho kamene ze třetí hromádky, neboť pak $g_7(13) = 5$.

Je zde ovšem oproti Nimu přece jen jeden rozdíl – tento optimální tah není jediný, protože SG-funkce nemusí být nutně monotónní (tj. se zmenšující hodnotou argumentu se nemusí nutně zmenšovat hodnota SG-funkce) a můžeme tak *generovat* jedničky i na vyšších místech.

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$\begin{array}{rcccc} g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\ g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\ 5 = & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebnou hodnotu 5 dosáhneme odebráním jednoho kamene ze třetí hromádky, neboť pak $g_7(13) = 5$.

Je zde ovšem oproti Nimu přece jen jeden rozdíl – tento optimální tah není jediný, protože SG-funkce nemusí být nutně monotónní (tj. se zmenšující hodnotou argumentu se nemusí nutně zmenšovat hodnota SG-funkce) a můžeme tak *generovat* jedničky i na vyšších místech.

Např. zde je dalším vítězným tahem odebrání 3 kamenů z první hromádky, neboť pak $g_3(6) = 2$ a $2 \oplus 4 \oplus 6 = 0$. Žádný tah v druhé hromádce ovšem již vítězný není.

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Úprava Nimu na hru typu *Vezmi a rozděl* je dílem E. Laskera, šachového mistra světa v letech 1894–1921.

V této hře je možné zahrát některý z tahů:

- klasické odebrání libovolného počtu kamenů z některé hromádky,
- rozdělení hromádky s alespoň dvěma kameny na dvě neprázdné hromádky.

Úprava Nimu na hru typu *Vezmi a rozděl* je dílem E. Laskera, šachového mistra světa v letech 1894–1921.

V této hře je možné zahrát některý z tahů:

- klasické odebrání libovolného počtu kamenů z některé hromádky,
- rozdělení hromádky s alespoň dvěma kameny na dvě neprázdné hromádky.

Poměrně snadno lze indukcí dokázat, že SG-funkce pro Laskerův Nim s jednou hromádkou má tvar

$g(4k+1) = 4k+1, g(4k+2) = 4k+2, g(4k+3) = 4k+4, g(4k+4) = 4k+3$
pro $k \geq 0$.

Úprava Nimu na hru typu *Vezmi a rozděl* je dílem E. Laskera, šachového mistra světa v letech 1894–1921.

V této hře je možné zahrát některý z tahů:

- klasické odebrání libovolného počtu kamenů z některé hromádky,
- rozdělení hromádky s alespoň dvěma kameny na dvě neprázdné hromádky.

Poměrně snadno lze indukcí dokázat, že SG-funkce pro Laskerův Nim s jednou hromádkou má tvar

$g(4k+1) = 4k+1, g(4k+2) = 4k+2, g(4k+3) = 4k+4, g(4k+4) = 4k+3$
pro $k \geq 0$.

Příklad

Vyzkoušejte si Laskerův Nim s úvodním stavem $(2, 5, 7)$.

Hra Kayles byla zmíněn H. E. Dudeneyem v *The Canterbury puzzles* (1958). Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Hra Kayles byla zmíněn H. E. Dudeneyem v *The Canterbury puzzles* (1958). Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Tato hra se dá popsat pomocí odebírání kamenů následovně: tahem je odebrání jednoho nebo dvou kamenů z jedné hromádky, kterou je poté možno rozdělit na dvě neprázdné hromádky.

Hru si můžete zahrát na

<http://www.chlond.demon.co.uk/Kayles.html> (lokálně zde).

Hra Kayles byla zmíněn H. E. Dudeneyem v *The Canterbury puzzles* (1958). Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Tato hra se dá popsat pomocí odebrání kamenů následovně: tahem je odebrání jednoho nebo dvou kamenů z jedné hromádky, kterou je poté možno rozdělit na dvě neprázdné hromádky.

Hru si můžete zahrát na

<http://www.chlond.demon.co.uk/Kayles.html> (lokálně zde).

Najděme SG-funkci pro hru Kayles, kde úvodní stav je hromádka s n kameny. Jediný koncový stav je prázdná hromádka, tedy $g(0) = 0$. Snadno $g(1) = 1$ a $g(2) = 2$. Z hromádky se třemi kameny můžeme odebrat buď 1 nebo 2 kameny (SG:1,2) nebo odebrat jeden kámen a rozdělit na dvě hromádky (SG:0).

Tímto postupem dopočítáme tabulku (x je číslo řádku, y sloupce)

$g(12x + y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6
1	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
2	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7
3	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
4	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7
5	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
6	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Tímto postupem dopočítáme tabulku (x je číslo řádku, y sloupce)

$g(12x + y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6
1	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
2	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7
3	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
4	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7
5	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
6	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Od hodnoty $n = 72$ je dále funkce g periodická s periodou 12, tučně jsou vyznačeny výjimky oproti hodnotám v posledním řádku.

Tímto postupem dopočítáme tabulku (x je číslo řádku, y sloupce)

$g(12x + y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6
1	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
2	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7
3	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
4	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7
5	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
6	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Od hodnoty $n = 72$ je dále funkce g periodická s periodou 12, tučně jsou vyznačeny výjimky oproti hodnotám v posledním řádku.

Příklad

Vyřešte úvodní Dudeneyovu úlohu s dvěma hromádkami (1, 11).

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Hry s otáčením mincí zobecňují dříve uvedenou hru *Otáčení želv*. V řadě je konečně mnoho mincí otočených vzhůru lícovou či rubovou stranou. Tah spočívá v otočení mincí z nějaké sady podle pravidel konkrétní hry. **Vždy však musí být nejpravější otáčená mince otočena z lícové na rubovou stranu** (podmínka konečnosti hry). To, které mince jsou otáčeny, smí záviset pouze na pozici nejpravější otáčené mince, nikoli již na jiných pozicích, předchozích tazích apod.

Hry s otáčením mincí zobecňují dříve uvedenou hru *Otáčení želv*. V řadě je konečně mnoho mincí otočených vzhůru lícovou či rubovou stranou. Tah spočívá v otočení mincí z nějaké sady podle pravidel konkrétní hry. **Vždy však musí být nejpravější otáčená mince otočena z lícové na rubovou stranu** (podmínka konečnosti hry). To, které mince jsou otáčeny, smí záviset pouze na pozici nejpravější otáčené mince, nikoli již na jiných pozicích, předchozích tazích apod. Pro všechny takovéto hry platí zřejmě obdobný rozklad jako pro *Otáčení želv*– stav s k líci na pozicích v_1, \dots, v_k je součtem k her, kde v každé hře (číslo i) je právě jeden líc a to na pozici v_i .

Hry s otáčením mincí zobecňují dříve uvedenou hru *Otáčení želv*. V řadě je konečně mnoho mincí otočených vzhůru lícovou či rubovou stranou. Tah spočívá v otočení mincí z nějaké sady podle pravidel konkrétní hry. **Vždy však musí být nejpravější otáčená mince otočena z lícové na rubovou stranu** (podmínka konečnosti hry). To, které mince jsou otáčeny, smí záviset pouze na pozici nejpravější otáčené mince, nikoli již na jiných pozicích, předchozích tazích apod. Pro všechny takovéto hry platí zřejmě obdobný rozklad jako pro *Otáčení želv*– stav s k líci na pozicích v_1, \dots, v_k je součtem k her, kde v každé hře (číslo i) je právě jeden líc a to na pozici v_i . Např. hra RLLRRL je součtem her RL, RRRRL a RRRRRRL, proto pro určení SG-hodnoty obecné hry stačí určit SG-hodnoty her s právě jedním lícem.

Reprezentace her pomocí otáčení mincí

Podobně jako lze hry reprezentovat pomocí Nimu, lze často hry reprezentovat i pomocí otáčení mincí.

Reprezentace her pomocí otáčení mincí

Podobně jako lze hry reprezentovat pomocí Nimu, lze často hry reprezentovat i pomocí otáčení mincí.

U některých her je výhodnější reprezentace pomocí Nimu, u jiných je tomu naopak.

Příklad (Jednoduchá úvodní odečítací hra)

Mějme odečítací hru s $S = \{1, 2, 3\}$. Hru reprezentujeme pomocí n mincí očíslovaných od 1 do n , v každém tahu musí být otočena mince na pozici x z lícové na rubovou stranu a dále otočena mince na pozici $x - 1, x - 2$ nebo $x - 3$ (pokud $x > 3$).

Zřejmě má líc na pozici 1 SG-hodnotu 1, na pozici 2 hodnotu 2, atd. Řada mincí s několika hlavami pak odpovídá několika hromádkám kamenů.

Reprezentace her pomocí otáčení mincí

Podobně jako lze hry reprezentovat pomocí Nimu, lze často hry reprezentovat i pomocí otáčení mincí.

U některých her je výhodnější reprezentace pomocí Nimu, u jiných je tomu naopak.

Příklad (Jednoduchá úvodní odečítací hra)

Mějme odečítací hru s $S = \{1, 2, 3\}$. Hru reprezentujeme pomocí n mincí očíslovaných od 1 do n , v každém tahu musí být otočena mince na pozici x z lícové na rubovou stranu a dále otočena mince na pozici $x - 1, x - 2$ nebo $x - 3$ (pokud $x > 3$).

Zřejmě má líc na pozici 1 SG-hodnotu 1, na pozici 2 hodnotu 2, atd. Řada mincí s několika hlavami pak odpovídá několika hromádkám kamenů.

Příklad (Dvojčata)

Dvojčata je velmi podobná hra převrácení želv, kdy musíme otočit právě dvě mince (s obvyklou konvekcí). Zde je vhodné číslovat pozice mincí od 0 – dostáváme tak $g(x) = x$ (tedy Twins jsou opět totéž, co Nim).

Příklad (Falešné želvy)

Tato hra má prostřednictvím mincí přirozenější reprezentaci než jako hra s hromádkami kamenů. Je podobná hře *Převracení želv*, máme ale povoleno otočit 1, 2 nebo 3 mince (jako obvykle s nejpravější ve směru líc → rub).

Příklad (Falešné želvy)

Tato hra má prostřednictvím mincí přirozenější reprezentaci než jako hra s hromádkami kamenů. Je podobná hře *Převracení želv*, máme ale povoleno otočit 1, 2 nebo 3 mince (jako obvykle s nejpravější ve směru líc \rightarrow rub).

V tomto případě se ukazuje jako výhodnější pro výpočet SG-funkce číslovat pozice mincí od 0 místo od 1. Obvyklým způsobem vypočteme

pozice x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$:	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21

Jestli jde funkci $g(x)$ popsat jiným obvyklým způsobem, je asi obtížné na první pohled odhalit (kromě toho, že $g(x)$ je vždy rovno buď $2x$ nebo $2x + 1$).

Příklad (Falešné želvy)

Tato hra má prostřednictvím mincí přirozenější reprezentaci než jako hra s hromádkami kamenů. Je podobná hře *Převracení želv*, máme ale povoleno otočit 1, 2 nebo 3 mince (jako obvykle s nejpravější ve směru líc \rightarrow rub).

V tomto případě se ukazuje jako výhodnější pro výpočet SG-funkce číslovat pozice mincí od 0 místo od 1. Obvyklým způsobem vypočteme

pozice x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$:	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21

Jestli jde funkci $g(x)$ popsat jiným obvyklým způsobem, je asi obtížné na první pohled odhalit (kromě toho, že $g(x)$ je vždy rovno buď $2x$ nebo $2x + 1$).

Odpověď (opět) závisí na binárním zápisu čísel – číslo nazveme *odious* (hnusné), pokud je počet 1 v jeho binárním zápisu lichý, je-li počet jedniček sudý nazveme ho *evil* (odporné).

Lze poměrně snadno (indukcí) dokázat, že $g(x) = 2x + 1$, pokud je $2x$ *evil*, a rovno $2x$, pokud je *odious*. Jinými slovy, posloupnost $g(x)$ je tvořena právě všemi *odious* čísly.

Samotný důkaz je založen na faktu, že

$$evil \oplus evil = odious \oplus odious = evil$$

$$odious \oplus evil = evil \oplus odious = odious.$$

Lze poměrně snadno (indukcí) dokázat, že $g(x) = 2x + 1$, pokud je $2x$ *evil*, a rovno $2x$, pokud je *odious*. Jinými slovy, posloupnost $g(x)$ je tvořena právě všemi *odious* čísly.

Samotný důkaz je založen na faktu, že

$$evil \oplus evil = odious \oplus odious = evil$$

$$odious \oplus evil = evil \oplus odious = odious.$$

Pokud máme nyní líce na pozicích x_1, \dots, x_n , pak, jde-li o P-pozici, (tj. $g(x_1) \oplus \dots \oplus g(x_n)$), pak nutně n musí být sudé, a navíc $x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 0$ (neboť $g(x) = 2x$ s *občasným* přidáním 1).

P-pozice ve *Falešných želvách* jsou právě P-pozice v Nimu, které mají sudý počet hromádek.

Tato hra má pomocí velmi jednoduchou reprezentaci pomocí otáčení mincí. Tah spočívá v tom, že libovolný počet sousedících mincí může být otočen. Pokud číslujeme pozice od 1, splňuje SG-funkce vztah

$$g(n) = \text{mex}\{0, g(n-1), g(n-1) \oplus g(n-2), \dots, g(n-1) \oplus \dots \oplus g(1)\}.$$

Tato hra má pomocí velmi jednoduchou reprezentaci pomocí otáčení mincí. Tah spočívá v tom, že libovolný počet sousedících mincí může být otočen. Pokud číslujeme pozice od 1, splňuje SG-funkce vztah

$$g(n) = \text{mex}\{0, g(n-1), g(n-1) \oplus g(n-2), \dots, g(n-1) \oplus \dots \oplus g(1)\}.$$

Z tohoto vztahu lze snadno odvodit hodnoty SG-funkce:

pozice x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(x)$:	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2,

tj. $g(x)$ je nejvyšší mocnina 2 dělicí n . Název hry vychází z dělky značek na pravítku.

- 1 Hry na odebírání kamenů
- 2 Nim
- 3 Hry na grafech
- 4 Součty her
- 5 Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
 - Hry Take-and-Break
 - Otáčení mincí
 - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin

Zobecníme nyní otáčení mincí přidáním dalšího rozměru. Souřadnice mincí budeme číslovat od 0 a znázorňovat ve 4. kvadrantu, podmínku, že nejpravější mince musí být otočena z líce na rub nahradíme toutéž podmínkou pro minci nejvíce na *jihovýchod* – označíme-li její souřadnice (x, y) pak každá otáčená mince musí být v obdélníku $\{(a, b) : 0 \leq a \leq x; 0 \leq b \leq y\}$

Tah v této hře spočívá v otočení čtyř **různých** mincí v rohu nějakého rovnoběžníku.

Rekurentní vztah pro SG-funkci se učí snadno:

$$g(x, y) = \text{mex}\{g(x, b) \oplus g(a, y) \oplus g(a, b) : 0 \leq a < x; 0 \leq b < y\},$$

s počátečními podmínkami $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ pro všechna x, y . Zřejmě rovněž $g(x, 1) = g(1, x) = 1$ (další reprezentace klasického jednohromádkového Nimu).

Následující tabulka udává hodnoty SG-funkce pro hru *Otáčení rohů* vypočtené pomocí uvedeného rekurzivního vztahu:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7
3	0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9
4	0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5
5	0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11
6	0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2
7	0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12
8	0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10
9	0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4
10	0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13
11	0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3
12	0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15
13	0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1
14	0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8
15	0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6

Jako ilustraci spočítejme $g(4, 4)$ prostřednictvím rekurentního vzorce – z této pozice je 16 možných tahů (10 až na symetrii), po výpočtu jejich SG-hodnot dostaneme $g(4, 4) = \text{mex}\{0, 4, 8, 12, 1, 14, 11, 3, 5, 2\} = 6$.

Jako ilustraci spočítejme $g(4, 4)$ prostřednictvím rekurentního vzorce – z této pozice je 16 možných tahů (10 až na symetrii), po výpočtu jejich SG-hodnot dostaneme $g(4, 4) = \text{mex}\{0, 4, 8, 12, 1, 14, 11, 3, 5, 2\} = 6$.

Stav

R	R	R	R	R
R	R	R	L	R
R	R	R	R	R
R	R	L	R	R
R	R	R	R	L

má SG-hodnotu $3 \oplus 1 \oplus 6 = 4$ a je tedy N-stavem. Vítězný tah musí ze 6 udělat 2 – jedinou možností je otočit mince na pozicích $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ a $(4, 4)$.

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Ihned je vidět, že $0 \otimes x = 0$ a $x \otimes 0 = 0$ a dále, že $1 \otimes x = x$ a $x \otimes 1 = x$ (tedy 0 a 1 se chovají obdobně jako u běžného násobení). Zřejmě je rovněž operace \oplus komutativní (tj. $x \oplus y = y \oplus x$).

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Ihned je vidět, že $0 \otimes x = 0$ a $x \otimes 0 = 0$ a dále, že $1 \otimes x = x$ a $x \otimes 1 = x$ (tedy 0 a 1 se chovají obdobně jako u běžného násobení). Zřejmě je rovněž operace \oplus komutativní (tj. $x \oplus y = y \oplus x$).

Méně zřejmá je již asociativita Nim-součinu

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Okamžitě je vidět, že $0 \otimes x = 0$ a $x \otimes 0 = 0$ a dále, že $1 \otimes x = x$ a $x \otimes 1 = x$ (tedy 0 a 1 se chovají obdobně jako u běžného násobení). Zřejmě je rovněž operace \oplus komutativní (tj. $x \oplus y = y \oplus x$).

Méně zřejmá je již asociativita Nim-součinu

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Platí ale rovněž i distributivita Nim-součinu vzhledem k Nim-součtu:

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

Neméně významným faktem je, že každé nenulové číslo má Nim-inverzi (tj. pro každé nenulové x existuje x' tak, že $x \otimes x' = 1$). Označíme-li jako \oslash nim-dělení, můžeme např. psát $1 \oslash 2 = 3$ nebo $6 \oslash 5 = 9$.

Poznámka (Algebraická)

Množina nezáporných celých čísel \mathbb{N}_0 spolu s operacemi Nim-součtu a Nim-součinu tvoří tzv. těleso (obdoba \mathbb{R}, \mathbb{Q} s klasickými operacemi $+, \cdot$, přitom ale $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ těleso netvoří).

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým.

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým.

Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

- 1 Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým.

Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

- 1 Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu
- 2 Nim-součin Fermatovy mocniny se sebou samotnou je roven roven běžnému součinu Fermatovy mocniny a $3/2$.

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým.

Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

- 1 Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu
- 2 Nim-součin Fermatovy mocniny se sebou samotnou je roven roven běžnému součinu Fermatovy mocniny a $3/2$.

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým.

Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

- 1 Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu
- 2 Nim-součin Fermatovy mocniny se sebou samotnou je roven roven běžnému součinu Fermatovy mocniny a $3/2$.

$$\begin{aligned} 24 \otimes 17 &= (16 \oplus 8) \otimes (16 \oplus 1) = (16 \otimes 16) \oplus (16 \otimes 1) \oplus (8 \otimes 16) \oplus (8 \otimes 1) = \\ &= 24 \oplus 16 \oplus 126 \oplus 8 = 128 \end{aligned}$$

V případě výpočtu $8 \otimes 8$ neumíme napsat 8 jako Nim-součet dvou jednodušších čísel, pomůžeme si proto zápisem $8 = 2 \otimes 4$.

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 &= (2 \otimes 4) \otimes (2 \otimes 4) = (2 \otimes 2 \otimes 4 \otimes 4) = 3 \otimes 6 = (2 \oplus 1) \otimes (4 \oplus 2) = \\ &= (2 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 2) = 8 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 2 = 13. \end{aligned}$$

Tartanové hry

Hra *Otáčení rohů* je příkladem her, jejichž řešení je možné určit pomocí Nim-součinu.

Definice

Jsou-li G a H hry s obracením mincí, pak *tartanová hra* $G \times H$ je dvourozměrná hra s obracením mincí, v níž jsou povolené tahy právě uspořádané dvojice povolených tahů z G a H .

Tak dostáváme *Otáčení rohů* jako součin $Dvojčata \times Dvojčata$.

Tartanové hry

Hra *Otáčení rohů* je příkladem her, jejichž řešení je možné určit pomocí Nim-součinu.

Definice

Jsou-li G a H hry s obracením mincí, pak *tartanová hra* $G \times H$ je dvourozměrná hra s obracením mincí, v níž jsou povolené tahy právě uspořádané dvojice povolených tahů z G a H .

Tak dostáváme *Otáčení rohů* jako součin $Dvojčata \times Dvojčata$.
Pro analýzu tartanových her je důležitá následující věta.

Věta

Má-li hra G_1 SG-funkci g_1 a hra G_2 SG-funkci g_2 , pak má tartanová hra $G_1 \times G_2$ SG-funkci $g_1 \otimes g_2$, tj.

$$g(x, y) = g_1(x) \otimes g_2(y).$$

Koberec (otáčení bloku)

Hra *Koberec*, kdy je přípustným tahem otočení všech mincí v nějakém obdélníku (s obvyklou jihovýchodní konvencí), je vlastně součinem *Pravítko* \times *Pravítko*, odkud taky plyne výpočet SG-funkce.

Tabulka SG-funkce je tak dána hodnotami SG-funkce *Pravítka* a Nim-součinem jejich hodnot:

1	1	2	1	4	1	2	1	8
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	2	12
1	1	2	1	4	1	2	1	8
4	4	8	4	6	4	8	4	11
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	2	12
1	1	2	1	4	1	2	1	8
8	8	12	8	11	8	12	8	13

Příklad

Podívejme se na starou známou pozici

R	R	R	R	R
R	R	R	L	R
R	R	R	R	R
R	R	L	R	R
R	R	R	R	L

jako na pozici ve hře *Koberec*.

Příklad

Podívejme se na starou známou pozici

R	R	R	R	R
R	R	R	L	R
R	R	R	R	R
R	R	L	R	R
R	R	R	R	L

jako na pozici ve hře *Koberec*.

Podle předchozího spočítáme její SG-hodnotu $8 \oplus 4 \oplus 1 = 13$. Vítězný tah (otočení obdélníku $(1, 1) - (2, 4)$) změní hodnotu 8 na 5 a tedy celkový součet na 0.

- WW** Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy: **Winning Ways for Your Mathematical Plays**, Academic Press, 1982.
- GT** Thomas S. Ferguson: **Game Theory**, Impartial Combinatorial Games (UCLA lecture),
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf
- Wiki** **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, www.wikipedia.org.
- App** Martin J. Chlond, Online Java Games,
<http://www.chlond.demon.co.uk/>

- WW** Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy: **Winning Ways for Your Mathematical Plays**, Academic Press, 1982.
- GT** Thomas S. Ferguson: **Game Theory**, Impartial Combinatorial Games (UCLA lecture),
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf
- Wiki** **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, www.wikipedia.org.
- App** Martin J. Chlond, Online Java Games,
<http://www.chlond.demon.co.uk/>